

GENERAL LIBRARY
SEP 23 1922
UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 68 HEFT 2
DER GANZEN REIHE 373. BANDES 2. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, G. QUINCKE, W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1922 erscheinen Bd. 67, 68 und 69 à 8 Hefte. Preis von Band 68 für Belgien, Luxemburg und Frankreich Fr. 47.—; Dänemark Kr. 20.—; England £ -19-; Finnland Marka 60.—; Holland fl. 11.—; Japan £ -19-; Italien Lire 60.—; Norwegen Kr. 24.—; Schweden Kr. 20.—; Schweiz Fr. 20.—; Spanien Pes. 24.—; U.S.A. \$ 4.—.

Ausgegeben am 20. Juli 1922.

Inhalt.

	Seite
1. L. C. Glaser. Über das Spektrum des Beryllium und eine bemerkenswerte Beziehung desselben zu dem des Aluminium. (Hierzu Tafel I.)	73
2. Hilding Faxén. Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist.	89
3. J. Herweg und G. Mie. Die Zahl der von sehr schwachen Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen.	120
4. G. Szivessy. Der Temperaturkoeffizient der magnetischen Doppelbrechung	127
5. B. Gudden und R. Pohl. Über den ZnSCu-Phosphor.	154
6. W. Schottky. Zur Berechnung und Beurteilung des Schrotteffektes. (Bemerkungen zu der Notiz von Herrn J. B. Johnson.)	157

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Leopoldstraße 91.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 68.

1. *Über das Spektrum des Beryllium
und eine bemerkenswerte Beziehung desselben
zu dem des Aluminium;
von L. C. Glaser.*

(Hierzu Tafel I.)

Das Beryllium gehört, wie schon H. Kayser¹⁾ in seinem Handbuch der Spektroskopie bemerkt, zu den linienärmsten, aber noch am wenigsten bekannten Spektren.

In einer Abhandlung²⁾ über das Bandenspektrum des Beryllium habe ich bereits auf die Wichtigkeit der Kenntnis der Gesetzmäßigkeiten im Spektrum des Beryllium und gleichzeitig auf die Schwierigkeiten hingewiesen, die sich bei der Untersuchung des Spektrums ergeben. Diese Schwierigkeiten liegen in erster Linie in dem Umstande, daß bei der Linienarmut des Beryllium Untersuchungen von Berylliumsalzen im Kohlebogen, der unzweifelhaft seiner Lichtstärke halber zu bevorzugen ist, kaum in Frage kommen, weil die Gefahr des Übersehens von etwaigen Linien sehr groß ist und weil Beryllium im Bogen an Luft sofort zu der äußerst störenden Berylloxydbildung Anlaß geben. Das Berylloxyd mit seinem außerordentlich hohen Schmelzpunkt läßt sich schwer zur Emission bringen und bringt den Lichtbogen sehr leicht zum Verlöschen. Versuche mit pulverförmigem Berylliummetall führten zwar zur Feststellung des sehr einfach gebauten Berylliumbandenspektrum. Da pulverförmiges Berylliummetall, das in drei Proben zur Verfügung stand, jedoch nie frei von Berylliumoxyd ist, treten ebenfalls die geschilderten Schwierigkeiten auf, die langandauernde Belichtungen sofort ausschließen.

1) H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Bd. V. Leipzig, S. Hirzel, 1910. S. 160.

2) L. C. Glaser, Beiträge zur Kenntnis des Spektrums des Berylliums. Dr. Ing.-Diss. Breslau. Berlin 1916. Verlag von F. C. Glaser.

Prof. Dr. A. Stock, der Direktor des Kaiser Wilhelm-Instituts für Chemie, Berlin-Dahlem, stellte mir freundlicherweise eine Probe seines mittels Schmelzflußelektrolyse erhaltenen reinsten Berylliummetalls zur Verfügung, wofür ich mir gestatte, ihm an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Auf diese Weise war ich in die Lage gesetzt, den Lichtbogen und Funken zwischen Berylliummetallelektroden zu untersuchen.

Versuche zur Erzeugung des Linienspektrums.

Das Stocksche Berylliummetall, das schön blank war, und einen weißlichen kristallinischen Bruch, ähnlich wie Aluminium, aufwies, wurde passend zurechtgefeilt und in zwei Elektrodenhalter aus Messing gespannt, die in einer Vakuumbogenlampe untergebracht und horizontal zum Spalt des zur Aufnahme dienenden Spektrographen angeordnet waren, um die Lage der Emission der Linien nach der Lockyer'schen Methode untersuchen zu können. Der zwischen den Berylliummetallelektroden auftretende Lichtbogen zeigte ein strahlend-grünes Licht. In derselben Anordnung konnte das Flaschenfunkenpektrum beobachtet werden. Beide Arten der Untersuchung wurden bei mäßigem Vakuum, wie es sich durch eine Ölluftpumpe herstellen ließ, vorgenommen. Da das Metall, von dem nur eine kleine Menge zur Verfügung stand, auch beim Übergang des Bogens wie auch des Funkens — beim letzteren langsamer — stark anwärmte und wohl auch nicht ganz oxydfrei zu sein schien, so riß der Bogen nach kurzer Zeit ab. Die Beobachtungszeit betrug somit beim Bogen etwa 1—2 Min., beim Funken etwas länger. Für den Fortgang der Untersuchung wurde, da das Auseinandernehmen der für eine andere Untersuchung bestimmten Vakuumbogenlampe zu lange dauerte und diese ohnehin im Verlauf der Arbeit etwas beschädigt wurde, beschlossen, die Untersuchung an Luft fortzusetzen. Sobald der Bogen bzw. Funken zum Erlöschen kam, wurden die Metallelektroden aus ihrem Halter genommen und auf einer Feile sowie mit Schmirgelpapier blank gerieben. Zur photographischen Untersuchung des Spektrums wurde vorläufig ausschließlich der elektrische Lichtbogen an Luft und im Vakuum verwendet.

Die zur Untersuchung verwendeten Spektralapparate.

Zur Beobachtung am Okular diente ein Wellenlängenspektroskop von C. Zeiss-Jena, sowie ein großes Gradsichtspektroskop von Fr. Schmidt und Haensch, Berlin. Das letztere diente auch zu Übersichtsmessungen. Die kurze Dauer des Lichtbogens zwischen Berylliummetallelektroden ließ zur Photographie des Spektrums nur lichtstarke Instrumente zur Anwendung kommen. Es wurden daher zwei sehr lichtstarke Gitterspektrographen, einer für das sichtbare Gebiet und der andere für das Violett und das Ultraviolett zusammengestellt.

a) Gitterspektrograph für das sichtbare Spektrum.

Als Spalt diente ein vorzüglicher symmetrischer Doppelspalt von C. A. Steinheil Söhne, München, als Kollimatorobjektiv ein Fernrohrobjektiv von Carl Zeiss-Jena, Serie C¹⁾ (zweiteiliges Fernrohrobjektiv vom Öffnungsverhältnis 1:6) bei 80 mm Öffnung und 50 cm Brennweite. Das Gitter war das von J. Stark²⁾ zu seinen bekannten Arbeiten über die Feinverlegung der Wasserstofflinien im elektrischen Felde benutzte Plangitter von 68 × 99 mm geteilter Fläche und einer Strichzahl von rund 590 mm (15000 Zoll engl.). Durch die freundliche Vermittlung von Herrn Prof. Dr. J. Stark wurde das Gitter, das sich im Besitz des physikalischen Instituts der Universität Greifswald befindet, von Herrn Prof. Dr. F. Krüger freundlichst zur Verfügung gestellt. Beiden Herren danke ich für ihr freundliches Entgegenkommen verbindlichst. Die erste Ordnung, die sich durch besondere Lichtstärke auszeichnet, wurde benutzt. Als Kameraobjektiv wurde ein auf meine Veranlassung von der Firma C. A. Steinheil Söhne, München, hergestelltes Fernrohrobjektiv von 1:4,5 Öffnungsverhältnis bei 80 mm freier Öffnung und 36 cm Brennweite benutzt. Diese Anordnung stellte einen sehr lichtstarken Spektrographen dar, der bereits mit Belichtungszeiten von einer Minute auch im Rot durchexponierte Spektren ergab.

1) C. Zeiss, Katalog für astronomische Optik. S. 103.

2) J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome, S. 29. Ann. d. Phys. 45. 1915. S. 195.

b) Gitterspektrograph für Violett und Ultraviolett.

Als Grundlage diente ein bereits an anderer Stelle¹⁾ kurz erwähnter, von dem Verfasser konstruierter Spektrograph, der sich durch eine besondere Erschütterungssicherheit auszeichnet. Als Spalt diente ein einfacher symmetrischer Spalt von C. A. Steinheil Söhne, München, als Kollimatorobjektiv ein Quarzflußspattriplet von C. Zeiss-Jena von 1:4,5 Öffnungsverhältnis und 18 cm Brennweite bei 45 mm freier Öffnung, das auf meine Veranlassung von der Firma C. Zeiss-Jena berechnet und gebaut wurde und das mir zu Versuchszwecken gütigst überlassen wurde, wofür ich an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte. Als Kameraobjektiv diente ein von der Firma B. Halle Nachf. auf meine Veranlassung hergestelltes Quarzflußspatobjektiv von rund 1:5 Öffnungsverhältnis und etwa 200 mm Brennweite bei 42 mm freier Öffnung, das besonders dadurch gekennzeichnet ist, daß seine Flußspatteillinsen mit konvexen Quarzlinen zu einem Quarzflußspatachrometen von etwa 80 cm Brennweite vereinigt werden können. Die Herstellung dieses Objektivs stellte an die Ausdauer und Sorgfalt des Optikers hohe Anforderungen und so möchte ich an dieser Stelle besonders die Leistungen der Herren Ritter und Frank bei der Fertigstellung dieses Objektivs erwähnen, das ganz vorzüglich ausgefallen ist und zusammen mit dem ebenso vorzüglichen Quarzflußspattriplet von C. Zeiss-Jena in der Tat einen ganz vorzüglichen und lichtstarken, punktförmig abbildenden Gitterspektrograph darstellt. Das Gitter wurde gleichfalls in der ersten Ordnung benutzt und war ein Hohlgritter von 42×50 geteilter Fläche bei einer Strichzahl von 786 mm (20000 Linien/Zoll engl.) und einer Brennweite von 1780 mm.

Die lineare Dispersion des Gitterspektrographen für das sichtbare Gebiet $\lambda\lambda$ 6500—4900 betrug je nach der gewählten Einstellung des Plangitters 45,8—46,8 A.-E. je Millimeter. Die lineare Dispersion des Gitterspektrographen für das violette und ultraviolette Gebiet ($\lambda\lambda$ 4900—3000 in I. Ordnung,

1) L. C. Glaser, Die metallurgischen Vorgänge beim sauren und basischen Windfrischverfahren auf Grund spektralanalytischer Beobachtungen. Stahl und Eisen, Jahrg. 1920, Bd. 40, S. 73 ff, 111 ff, 188 ff, No. 3, 4 u. 6.

sowie $\lambda\lambda$ 3000—2000 in II. Ordnung) betrug rund 51 bzw. 25,5 Å.-E. je Millimeter. Obwohl die optische Auflösung beider Instrumente sehr groß war, konnte dieselbe wegen der geringen photographischen Auflösung der Spektrographen, die durch die geringe Brennweite der Kameraobjektive begründet war, nicht ausgenutzt werden. Die Meßgenauigkeit wechselt daher mit dem Liniencharakter und ist etwa auf $\pm 0,5$ bis 0,7 Å.-E. zu veranschlagen.

Ferner wurden Aufnahmen zum Vergleich, zur Überprüfung und zur Messung herangezogen, die in den Jahren 1910 und 1911 in London im Laboratorium von A. Fowler, in den Jahren 1913 und 1914 im astrophysikalischen Observatorium in Potsdam und 1914 im Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie erhalten waren.

Ergebnisse der Messungen am Linienspektrum.

Die Messungen des Linienspektrums ergaben eine Bestätigung der früheren Messungen, insonderheit von H. A. Rowland und Tatrall mit den schon bereits früher gegebenen Einschränkungen. Zuzufolge der in der Einleitung geschilderten Gründe ist es außerordentlich schwierig, festzustellen, ob Berylliumlinien vorliegen. Die geringe Menge des zur Verfügung stehenden Metalls wurde daher dazu benutzt, um das Spektrum zwischen Metallelektroden aufzunehmen und auf Grund dieser Ergebnisse mit den früheren Ergebnissen und dem früheren ausgedehnten Plattenmaterial zu vergleichen, das zumeist mit stärkster Dispersion und Auflösung gewonnen wurde. Die im Gebiet von $\lambda\lambda$ 5500—4900 Å.-E. aufgenommenen Spektren ließen, soweit die vorliegende Materialmenge das gestattete, feststellen, daß außer dem schon früher beobachteten Bandenspektrum¹⁾ außer der Verunreinigung des Metalls durch Alkalien und Erdalkalimetallen keine Berylliumlinien sich mit Sicherheit feststellen ließen. Bei der angewandten Erregung kann es sich jedoch nur um lichtschwache Linien handeln, die vielleicht bei längeren Expositionszeiten zu erhalten sind. Von den schon früher von G. Ciamician beobachteten grünen Linien ließ sich eine schwache Andeutung feststellen. Die

1) L. C. Glaser, a. a. O.

Belichtungszeiten ließen jedoch eine Entscheidung nicht zu. Im Gegensatz zu früheren Beobachtern sind im Gebiet von λ 4900 bis 3000 eine Anzahl von Linien beobachtet worden, die mit größter Wahrscheinlichkeit dem Beryllium zuzuordnen sind. Hier gilt jedoch im Hinblick auf die angewandte Dispersion Vorsicht, bis dieselben unter günstigeren Verhältnissen — leider wurde das zur Verfügung stehende Material zu der vorliegenden Untersuchung bereits aufgebraucht — und mit größeren Gitterspektrographen endgültig festgestellt sind.

Zahlentafel der beobachteten Linien.

Intensität.		Bemerkungen.	
4607	4	? Be	vielleicht auch Strontium 4607
4600	2	? Be	
4572	6		
4486,7	2	? Be	
4277,8	3	? Be	
4263,6	4	? Be	
4216,0	5		
4079,0	5		
3994,0	4		
3936,0	5		
3909,3	3—4		
3891,0	4—5		

Die vorstehenden Linien wurden mit den oben erwähnten Spektrographen gemessen. Sie sind bis auf Linie 4572 neu. Über ihre Einteilung in Serien kann erst entschieden werden, wenn wir über das Verhalten der schon bekannten Linien und der neu beobachteten genaue Beobachtungen ihrer Feinstruktur, genaue Wellenlängenangaben im feldfreien Zustande, sowie Messungen ihrer Aufspaltung im magnetischen und elektrischen Felde (Zeeman- und Starkeffekt), und ihres Starkdopplereffektes vorliegen. Bei der Wichtigkeit der Kenntnis dieser Verhältnisse für die Atomphysik wird in einer weiteren Arbeit über diese physikalische Serieneinreihung berichtet werden.

Die Linie 4572 wurde auf Platten, die mit dem für eine andere Arbeit¹⁾ hergerichteten Konkavgitterspektrographen des

¹⁾ K. Schwarzschild, Über die Verschiebungen der Bande bei 3883 Å im Sonnenspektrum. Sitzungsber. Berl. Akad. Bd. 47. 1914. S. 1202.

astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam in zweiter Ordnung aufgenommen waren, bei einer Dispersion von 2,5 Å.-E. je Millimeter, gemessen.

Es ergab sich:

$$4572,73 \pm 0,0098 \text{ Å.-E.},$$

bezogen auf die internationalen Eisennormalen. Da die Linie verhältnismäßig stark und breit ist, ist die Meßgenauigkeit auch nicht besonders hoch.

Über die Beziehung des Bandenspektrums des Beryllium zu dem des Aluminium.

Das Bandenspektrum des Beryllium zeigt nach einer früheren Arbeit¹⁾, sowie nach Beobachtungen, die im Verlauf dieser Arbeit gemacht wurden, eine auffallende Ähnlichkeit mit dem Bandenspektrum des Aluminium. Beide Spektren erscheinen, wie sich besonders unter den hier gewählten Versuchsbedingungen wiederum bestätigen ließ, unter den gleichen Bedingungen. Es ist in beiden Fällen schwierig, mit Sicherheit festzustellen, ob sie als „Metall“- oder „Verbindungsspektren“ aufzufassen sind, wie der bisherige Brauch der Spektroskopiker unterschied. Man kann sie besser als „Valenz“-Spektren bezeichnen, wie ich das anknüpfend an Vorstellungen von J. Stark, wonach bei der Emission der Bandenspektren bestimmte Elektronen, sogenannte „Valenzelektronen“ bei der Emission beteiligt sind, schon früher an anderer Stelle getan habe.²⁾ Ich möchte der Ansicht hinneigen, daß der Sauerstoff der Luft in irgendeiner Weise an ihrer Erregung beteiligt ist. Die Möglichkeit einer Wasserstoffverbindung läge auch im Bereich des Möglichen. Bei der Herstellung von Aluminium- wie Berylliummetall wird es immer schwierig sein, so kleine Mengen von Sauerstoff und Wasserstoff auszuschließen, daß sie nicht schließlich spektralanalytisch wirksam sein könnten. Aus dem Umstande, daß die Banden des Beryllium wie die des Aluminium beim Biegen im Vakuum viel schwächer werden, ist mit einiger Sicherheit zu

1) L. C. Glaser, a. a. O.

2) L. C. Glaser, Stahl und Eisen 1920 Bd. 40 und in einem Vortrage in der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. S. Verh. d. deutsch. Phys. Ges.

schließen, daß der Sauerstoff daran beteiligt ist. Für die Betrachtungen und Beobachtungen, die sich hier anschließen, ist es auch bis zu einem gewissen Grade gleichgültig, welcher Sitz für die Emission der Bandenspektren von Aluminium und Beryllium anzunehmen ist. Es ist nur wichtig, anzunehmen, daß in beiden Fällen gleiche Bedingungen für die Erregung der Bandenspektren vorliegen, wozu auch die Ergebnisse dieses Abschnittes den Beweis liefern. Die Emission des Bandenspektrums des Beryllium ist wie die des Aluminiums auf den Saum des Lichtbogens beschränkt, d. h. auf die äußere Hohlflamme, wie sie zuerst P. Lenard¹⁾ beobachtet hat. Sehr deutlich ließ sich das wieder gelegentlich dieser Untersuchung feststellen und bestätigen. Man kann daher auch die von H. Kayser und seinen Schülern gegen die Lenardsche Beobachtungsweise vorgebrachten Gründe damit widerlegen, daß, sobald nur punktförmig abbildende Spektralapparate — auch Konkavgitterspektrographen lassen sich mühelos für punktförmige Abbildung einrichten — zur Verfügung stehen, es auch auf photographischem Wege möglich ist, die räumliche Verteilung der Emission in einem Lichtbogen zu untersuchen.

A. Bandenspektrum des Beryllium.

I. Grüngelbe Berylliumbande A.

	I.-Å im internationalen System	Å.-E. nach Rowland	I.-Å. bezogen auf den luftleeren Raum	1/λ bezogen auf den luftleeren Raum
1.	5445,9	5446,1	5447,4	18357,4
2.	5462,7	5462,9	5464,2	18301,0
3.	5477,0	5477,2	5478,5	18253,2
4.	5488,1	5488,3	5489,6	18216,3

II. Grüne Berylliumbande B.

1.	5054,10	5054,28	5055,47	19780,55
2.	5075,21	5075,39	5076,60	19698,23
3.	5094,64	5094,82	5096,03	19623,12
4.	5111,97	5112,15	5113,37	19556,58
5.	5127,25	5127,43	5128,65	19498,30
6.	5140,53	5140,71	5141,94	19447,90
7.	5151,45	5151,63	5152,86	19406,70

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 11. S. 636—650. 1903; 17. S. 197 bis 247. 1908.

III. Blaue Berylliumbande B.

	I.-Å.	Å.-E.	I.-Å. _{vac}	1/λ _{vac}
1.	4708,67	4708,85	4709,96	21231,64
2.	4732,66	4732,84	4733,95	21124,00
3.	4754,46	4754,64	4755,76	21027,13
4.	4775,37	4775,55	4776,68	20935,33
5.	4795,24	4795,62	4796,56	20848,27
6.	4813,04	4813,22	4814,36	20771,20
7.	4827,35	4827,53	4828,67	20709,64

IV. Violette Berylliumbande D.

1.	4427,34	4427,52	4428,56	22580,70
2.	4451,79	4451,96	4453,02	22456,70
3.	4474,79	4474,96	4476,02	22341,80
4.	4496,47	4496,64	4497,71	22233,53
5.	4515,25	4515,42	4516,49	22141,10
6.	4530,66	4530,83	4531,90	22065,80

Die obigen Werte wurden einer früheren Arbeit des Verfassers entnommen und im Verlauf der vorliegenden bestätigt. Über die Bezeichnungen der Banden, Messungseinzelheiten usf. muß auf die schon verschiedene Male erwähnte Arbeit verwiesen werden. Dies gilt auch für die grüngelbe Berylliumbande A, die allerdings nur schwach auf den Aufnahmen mit dem Plangitterspektrograph infolge der kurzen Belichtungszeit hervortrat. Die Feinstruktur der blauen Berylliumbande C wurde bereits schon früher aufgefunden und genau beschrieben. Die kurzbrennweitigen in dieser Arbeit verwendeten Spektrographen hatten ein so geringes photographisches Auflösungsvermögen, daß eine Beobachtung der Feinstruktur der Banden unmöglich war. Um so klarer traten die Bandenköpfe hervor.

B. Das Bandenspektrum des Aluminiums.

Um genaue Vergleichswerte zu finden, wurden Aufnahmen des Aluminiumbandenspektrums mit dem Hartmannschen Mikrophotometer, Bauart R. Toepfer, ausgemessen. Die Aufnahmen waren mit Instrumenten von gleichem photographischen und optischen Auflösungsvermögen aufgenommen und daher vergleichsfähig. Es ist dies ein wichtiger, bei Bandenspektren zu beachtender Umstand, auf den nachher besonders zurückzukommen sein wird.

I. Grüne Aluminiumbande B.

	λ L- \tilde{A} .	λ \tilde{A} -E.	λ_{vac}	$1/\lambda_{vac}$
1.	5079,3	5079,48	5080,69	19682,36
2.	5102,1	5102,28	5103,50	19594,40
3.	5123,4	5123,58	5124,80	19512,96
4.	5143,1	5143,28	5144,51	19438,20
5.	5160,9	5161,08	5162,31	19371,17

II. Blaugrüne Aluminiumbande C.

1.	4842,31	4842,49	4843,64	20645,62
2.	4866,36	4866,54	4867,69	20543,62

III. Blaue Aluminiumbande D.

1.	4648,22	4648,40	4649,51	21507,64
2.	4672,01	4672,19	4673,30	21398,15
3.	4694,59	4694,77	4695,88	21295,26
4.	4716,5	4716,68	4717,79	21196,36
5.	4735,9	4736,0 _s	4737,20	21109,51
6.	4753,9	4754,0 _s	4755,20	21029,61

Wie ein Blick auf die Abbildung zeigt, sind die Kanten bei beiden Spektren in regelmäßiger Folge aneinander gereiht. Zahlenmäßig kommt dies in folgenden Zusammenstellungen zum Ausdruck. Gruppe A des Beryllium lasse ich dabei weg.

Zahlentafel der ersten Differenzen der Wellenlängen und Wellenzahlen.

I. Beryllium.

Gruppe D.		Gruppe C.		Gruppe B.	
λ	$1/\lambda$	λ	$1/\lambda$	λ	$1/\lambda$
24,45	124,00	24,02	107,64	21,11	82,32
23,00	114,90	21,84	96,87	19,43	75,11
21,68	108,27	20,91	91,80	17,33	66,54
18,78	92,43	10,87	87,06	15,28	58,28
15,41	75,30	17,80	77,07	12,28	50,40
		14,31	61,56	10,92	41,20

II. Aluminium.

23,79	109,49	24,05	102,00	22,08	87,96
22,58	102,89	—	—	21,3	81,44
21,9	98,9	—	—	19,7	74,76
19,4	96,9	—	—	17,8	67,03
18,0	79,9	—	—	—	—

Die Zusammenstellung der vorstehenden Zahlentafel zeigt für die entsprechenden Werte von λ bzw. $1/\lambda$ der entsprechenden Gruppe für Beryllium und Aluminium sehr bemerkenswerte ähnliche, teils übereinstimmende Zahlen. Die Werte zeigen ferner, daß die Deslandresschen Gesetze nur in erster Annäherung gelten. Ich habe deshalb auch auf eine Widergabe einer zahlenmäßigen Berechnung der Deslandresschen Formel verzichtet, da nur eine mehrgliedrige Formel die Kanten in den Fehlergrenzen der Messung darstellen kann. Einen physikalischen Grund hierfür werde ich später mitteilen. Nach Deslandres kann man nun auch die Köpfe der einzelnen Bandengruppen zu Reihen zusammenfassen, aber eine genaue Kenntnis zusammenhängender Reihen zeigt wieder, daß dies nun eine erste grobe Annäherung an die Wirklichkeit ist, da die zweiten Differenzen nicht konstant sind.

Zahlentafel der ersten Differenzen der Wellenlängen und Wellenzahlen der zugehörigen Bandenkanten der einzelnen Bandengruppen.

I. Beryllium.

Seriengruppe 1.

λ_{vac}	5055,47	4709,96	4428,56
	345,51	281,40	
$1/\lambda_{vac}$	19780,55	21231,64	22580,70
	1451,09	1348,06	

Seriengruppe 2.

λ_{vac}	5076,60	4733,95	4453,02
	342,65	280,93	
$1/\lambda_{vac}$	19698,23	21124,00	22456,70
	1425,77	1392,70	

Seriengruppe 3.

λ_{vac}	5096,03	4755,76	4476,02
	340,27	279,74	
$1/\lambda_{vac}$	19623,12	21027,13	22341,80
	1403,02	1314,67	

Seriengruppe 4.

λ_{vac}	5113,37	4776,68	4497,71
	336,69	278,97	
$1/\lambda_{vac}$	19556,58	20935,33	22293,53
	1378,75	1298,20	

Seriengruppe 5.

λ_{vac}	5128,85	4796,56	4516,49
	332,09	280,07	
$1/\lambda_{vac}$	19498,30	20846,27	22141,10
	1359,97	1292,83	

Seriengruppe 6.

λ_{vac}	5141,94	4814,36	4531,90
	327,58	282,46	
$1/\lambda_{vac}$	19447,90	20771,20	22065,80
	1324,3	1294,60	

II. Aluminium.

Seriengruppe 1.

λ_{vac}	5090,69	4843,64	4649,51
	237,05	194,13	
$1/\lambda_{vac}$	19682,36	20645,62	21507,64
	963,26	862,02	

Seriengruppe 2.

λ_{vac}	5103,50	4867,69	4673,30
	235,81	194,39	
$1/\lambda_{vac}$	19594,40	20543,62	21396,15
	949,22	854,53	

Seriengruppe 3.

λ_{vac}	5124,80	4888,23	4695,88
	236,8	192,4	
$1/\lambda_{vac}$	19512,96	20451,8	21295,26
	938,8	843,5	

Der Umstand, daß die hier in beiden Metallen, Beryllium wie Aluminium auftretenden, auf den ersten Augenschein so regelmäßig aufgebauten Bandenkanten, mit steigender Gliedzahl oder, physikalisch gesprochen, mit wachsendem Abstand vom ersten noch scharfen Bandenkopf immer größere Abweichung von dem einfachen Deslandresschen Gesetz zeigen, ist durch die Feinstruktur der Gebilde begründet, die uns bei mangelhafter Auflösung als Häufungsstellen erscheinen, während in Wahrheit bei hinreichender Auflösung, kurzen Belichtungszeiten die Köpfe oder die Häufungsstelle verschwindet und sich aus einer gesetzmäßig gelagerten Liniengruppe ergibt, wie dies ja auch häufig an Linienserienspektren beobachtet ist. Dies erklärt einerseits den Gang in den ersten Differenzen in beiden, oben vorgenommenen Anordnungen der

Bandenköpfe sowohl des Berylliums wie des Aluminiums. Aus diesem Grunde ist bei Aufstellung von Gesetzmäßigkeiten in Bandenspektren besonders auf diesen Umstand zu achten und die Beobachtung der Spektren bei den Verschiedenheiten, Auflösungen und Dispersionen geboten. Für die theoretische Behandlung des bisher vorliegenden Materials gilt daher die gleiche Vorsicht. Im allgemeinen treten gerade im Gegensatz zu den Liniengesetzmäßigkeiten bei geringer Dispersion und kleinerem Auflösungsvermögen die leitenden Gesetzmäßigkeiten klarer ins Auge und verschwinden bei stärkerer Auflösung mehr und mehr. Da die Gesetzmäßigkeit der Bandenspektren selbst bei Elementen mit hohem Atomgewicht und hohen Wertigkeitsstufen zum Ausdruck kommt, bei denen bei unseren vorläufigen Kenntnissen eine Entwirrung der Linienspektren keine Möglichkeit irgendwelchen Erfolges bietet, ist es von besonderer Wichtigkeit, die Zusammenhänge, die sich hier für die Beurteilung des Atombaues aufzusuchen, zu erforschen. Leider ist dies nur durch Anwendung größter Mittel erreichbar. Bei den bisher vorliegenden Beugungsgittern scheint schon die Grenze des Auflösungsvermögens nicht mehr zu genügen. Da der Verfasser sich schon seit Jahren mit Arbeiten auf diesem Gebiet beschäftigt, wurde die Unmöglichkeit, namentlich bei schwereren Elementen wie Wo, Mo usf. weiterzudringen, dies zum äußeren Anlaß, sich mit den Möglichkeiten zu beschäftigen, wie die Apparatur leistungsfähiger zu gestalten ist. Dies führte einerseits zu Arbeiten über Verbesserung der optischen Beugungsgitter¹⁾, sowie zu der in Gemeinschaft mit E. Gehrcke ausgearbeiteten Methode²⁾ des Kreuzens von Interferenzapparaten auch mit Konkavgittern, was bei Beachtung einiger Vorsichtsmaßregeln sich sehr gut durchführen läßt. Bei Anwendung von Interferenzpunkten läßt sich nämlich außer dem optischen Auflösungsvermögen auch das photographische Auflösungsvermögen erheblich steigern. Doch ist die Methode wegen der Erhöhung der Belichtungszeit bei kurzlebigen Lichtquellen sehr beschränkt. Die Verbesserung der Gitter bleibt daher der aussichtsreichste Weg. Die Gesetzmäßig-

1) L. C. Glaser, Prüfung, Leistung und Eigenschaften optischer Beugungsgitter, Vortrag am 13. II. 1920 in Berlin vor der Gesell. f. techn. Physik.

2) E. Gehrcke u. L. C. Glaser, Ann. d. Phys. 65. S. 605. 1921.

keit, die die Feinstruktur der Bandenköpfe zeigt, ist auch der der Gründe, wie schon mehrfach angegeben, warum die Deslandresschen Gesetze nur als erste Annäherung gelten können.

Es ist daher zweckmäßig, die Gesetzmäßigkeit der Bandenspektren in anderer Form anzuschreiben, die zugleich physikalisch durch den Intensitätsverlauf und andere Gründe bedingt ist. In diesen Bandenspektren zeichnet sich eine Gruppe durch besonders große Intensität vor der anderen aus. Diese Gruppen sind durchaus nicht in irgendeiner Weise durch die Deslandresschen Gesetze gekennzeichnet. In diesem Falle ist es beim Beryllium die Bandengruppe C bei $\lambda\lambda 4708$ und beim Aluminium die Bandengruppe C bei $\lambda\lambda 4842$, um die sich die übrigen gruppieren, die durch gleiches physikalisches Verhalten ausgezeichnet sind, gleiches Auftreten (d. h. stärkstes Auftreten bei voller Entwicklung der übrigen und längstes Verweilen bei unvollständiger Entwicklung). Sie sind daher „Restbanden“ wie die Restlinien im Sinne von Hartley und A. de Gramont. Bei voller Entwicklung und starkem Auftreten zeigen die ersten Bandenköpfe, wenn auch selten, so doch gelegentlich Selbstumkehr. Bei Al $\lambda\lambda 4842$ ist das häufiger zu beobachten. Diese Eigenschaft der Umkehr ist ja bei den Linienspektren von J. C. Mc Lennan mit Erfolg zur Einreihung in Serien benutzt worden. Jedenfalls sind diese Bandengruppen so physikalisch besonders gekennzeichnet.

Daß dies weiterhin richtig ist, geht auch aus den Zahlenwerten der Gesetzmäßigkeiten hervor.

Nach der Zahlentafel auf S. 80, 81 u. 82 kann man schreiben:

I. Beryllium.

1. Seriengruppe.

$$\begin{array}{rcl} 21231,64 + 1348,06 & = & 22580,70 \\ 21221,64 & = & 21231,64 \\ 1348,06 - 103,06 - 21231,64 & = & 19780,55 \end{array}$$

2. Seriengruppe.

$$\begin{array}{rcl} 107,64 - 21231,64 + 1332,70 & = & 22456,70 \\ 107,64 - 21231,64 & = & 21124,00 \\ 1332,70 - 107,64 - 21231,64 & = & 19696,23 \end{array}$$

3. Seriengruppe.

$$\begin{array}{rcl} - 96,89 - 107,64 - 21231,64 + 1314,67 & = & 22341,80 \\ 96,89 - 107,64 - 21231,64 & = & 21027,13 \\ 96,89 - 107,64 - 21231,64 - 1314,67 - 89,34 & = & 19623,12 \end{array}$$

Man kann also nach folgendem Schema kombinieren:

1. Seriengruppe.

$$\begin{array}{r} A + c \\ A \\ c - b - A \end{array}$$

2. Seriengruppe.

$$\begin{array}{r} b - A + c \\ b - A \\ c - 2b - A \end{array}$$

3. Seriengruppe.

$$\begin{array}{r} 2b - A + c \\ 2b - A \\ c - 3b - A \end{array}$$

II. Aluminium.

1. Seriengruppe.

$$\begin{array}{r} 20645,62 + 862,02 = 21507,64 \\ 20645,62 = 20645,62 \\ 862,02 - 101,24 - 20645,62 = 19682,36 \end{array}$$

2. Seriengruppe.

$$\begin{array}{r} 102 - 20645,62 + 854,53 = 21898,15 \\ 102 - 20645,62 = 20543,62 \\ 854,53 - 94,69 - 102 - 20645,62 = 19594,40 \end{array}$$

3. Seriengruppe.

$$\begin{array}{r} 91,83 - 102 - 20645,62 + 843,47 = 21295,26 \\ 91,83 - 102 - 20645,62 = 20451,79 \\ 91,83 - 102 - 20645,62 - 843,47 - 95,36 = 19512,96 \end{array}$$

Man kann in dieser Anordnung die Werte für die Aluminiumbandenköpfe in gleicher Weise wie die für Beryllium kombinieren. Auffallend ist, daß die Differenzen der Werte für c für Be und Al nahezu konstante Werte geben:

$$\begin{array}{l} \text{1. Seriengruppe} \left\{ \begin{array}{l} 1348,46 \text{ Be} \\ 862,02 \text{ Al} \\ \hline 486,44 \text{ Be} - \text{Al} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{2. Seriengruppe} \left\{ \begin{array}{l} 1332,70 \text{ Be} \\ 854,53 \text{ Al} \\ \hline 478,17 \text{ Be} - \text{Al} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{3. Seriengruppe} \left\{ \begin{array}{l} 1314,67 \text{ Be} \\ 843,47 \text{ Al} \\ \hline 471,20 \text{ Be} - \text{Al} \end{array} \right. \end{array}$$

Die Werte für b liegen etwa in der Nähe von 100 und können für die erste Annäherung als konstant angesehen werden. Die Werte für A haben die Differenz von

$$\begin{array}{r} 21231,64 \text{ Be} \\ 20645,62 \text{ Al} \\ \hline 586,02 \end{array}$$

entsprechend etwa $b + (c_{\text{Be}} - c_{\text{Al}})$.

Die beigegebenen Abbildungen, die Vergrößerungen nach Originalaufnahmen sind, zeigen diese hier zahlenmäßig nachgewiesenen Beziehungen auch so in hervorragend deutlicher Weise. Die entsprechenden Bandengruppen von Al und Be sind um einen bestimmten Wellenlängenbetrag gegeneinander verschoben. Die Kanten liegen dann nahezu an übereinstimmender Stelle.

Was ist nun aus dieser Beziehung zu schließen?

Da man aus der geringen Empfindlichkeit der Bandenspektren gegen Einwirkung von Druck, magnetischen und elektrischen Feldern wohl schließen kann, daß der Atomkern bereits einen großen Einfluß auf die Ausbildung der Spektren hat, kann man aus der oben dargelegten Beziehung schließen, daß Be und Al in der bei der Emission ihrer Bandenspektren mitspielenden Atomstruktur einen gleichen Atombau zeigen, wie dies ja auch durch die chemische Ähnlichkeit im Verhalten von Be und Al zu erwarten ist. Man wird nach J. Stark den Valenzelektronen den Einfluß zuschreiben, das atomare Feld der Kerne oder der Dynamiden P. Lenards¹⁾ zu verlagern. Die Art der Verlagerung, die in diesem Falle im optischen Spektrum zum Ausdruck kommt, wird eine ähnliche sein, wenn der Aufbau der Kerne oder Dynamiden ein ähnlicher ist und sich nur, wie im Falle von Be und Al der Größenordnung nach unterscheiden. Daß das Gesetz, das hier zugrunde liegt, ein allgemeines zu sein scheint, geht daraus hervor, daß sich auch anderen Stellen des periodischen Systems ähnliche Beziehungen nachweisen lassen, worüber demnächst zu berichten sein wird.

Würzburg, Physik. Inst. der Universität, April 1922.

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. S. 735. 1903. Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Heidelberg 1918. S. 106.

(Eingegangen 5. Mai 1921.)

**2. Der Widerstand gegen die Bewegung einer
starrten Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die
zwischen zwei parallelen ebenen Wänden
eingeschlossen ist;
von Hilding Faxén.**

Bericht.

Nach einigen geschichtlichen Vorbemerkungen werden einige Ergebnisse, welche Widerstandsberechnungen in hohem Grade erleichtern, aus den von Oberbeck und anderen gefundenen Entwicklungen nach Kugelfunktionen abgeleitet. Dann kommt eine Methode, die Bedingung, daß die Flüssigkeit an den ebenen Wänden nicht gleiten darf, mittels Doppelintegralen zu befriedigen. Die Widerstandsformel wird numerisch ausgerechnet und mit Messungen von Westgren verglichen.

Kapitel I. Bemerkungen über Widerstandsberechnungen.

§ 1. Zweck der Abhandlung.

Auf den folgenden Seiten soll der Widerstand berechnet werden, den eine kleine starre Kugel erfährt, wenn sie sich in einer reibenden Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Wänden bewegt. Nur die langsame, konstante, geradlinige Bewegung parallel den Wänden soll untersucht werden. Der sich ergebende Einfluß der Gefäßwände auf den Widerstand wird dann auch für nicht völlig geradlinige und nicht streng konstante Bewegungen annähernd derselbe sein, vorausgesetzt, daß man nur die den Wänden parallelen Komponenten berücksichtigt. Wenn eine Kugel sich senkrecht zu den Wänden bewegt, so ist der Einfluß der Wände auf den Widerstand ein anderer und erfordert eine besondere Untersuchung, welche ich nicht ausgeführt habe. Von vornherein ist jedoch klar, daß die im folgenden angewandten Methoden dem Verfahren von Lorentz-Ladenburg¹⁾ vorzuziehen sind.

1) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 23, S. 453. 1907.

Meine Berechnung einer in der Kolloid-Physik erforderlichen Widerstandsformel der Öffentlichkeit vorzulegen, ist der Zweck dieser Abhandlung. Bei einer experimentellen Untersuchung der Brownschen Bewegung z. B. beobachtete man die Bewegung kleiner Körner zwischen zwei vertikalen Wänden und wollte nun die Korngröße aus der Fallgeschwindigkeit der Körner berechnen.¹⁾ Die bisher unbekannte Einwirkung der Wände machte jedoch die genaue numerische Berechnung der Resultate unmöglich. Die rechnerische Vollendung dieser und ähnlicher Arbeiten zu ermöglichen, ist mein Ziel mit dem Folgenden. Ferner hege ich die Hoffnung, daß die Widerstandsformeln dieser Abhandlung bei Auswertung der Ergebnisse von Versuchen über Kataphorese sich nützlich zeigen werden.

Herrn O. Emersleben, der parallel mit mir die numerischen Rechnungen ausgeführt hat, möchte ich an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

§ 2. Frühere Untersuchungen.

Soviel ich sehe, ist eine theoretische Berechnung der Einwirkung, die zwei parallele Wände auf den Widerstand gegen eine Bewegung parallel zu ihnen ausüben, bis jetzt nicht ausgeführt worden. Ein von Lorentz angegebenes und von Ladenburg angewandtes Verfahren (vgl. § 1) führt nicht zu hinreichend genauen Ergebnissen.²⁾

Über die Größe des gesuchten Effekts hat v. Weißenhoff eine sehr genau zutreffende Vermutung ausgesprochen.³⁾ Die einzige frühere Abhandlung, in der die betreffende Frage wirklich behandelt wird, ist eine experimentelle Untersuchung von Westgren, der auch eine empirische Formel aufgestellt hat.⁴⁾ Westgren hat dabei die mit den Versuchen am besten übereinstimmende Formel, die nur eine Konstante enthält, herausgegriffen. Die im folgenden berechnete theoretische Formel enthält drei neue Konstanten und stimmt der Form nach nicht mit der Westgrenschen Formel überein. Mit seinen Versuchen jedoch stimmt die theoretische Formel

1) I. Nordlund, Zeitschr. f. phys. Chem. 87, S. 56. 1914.

2) Vgl. J. v. Weißenhoff, Ann. d. Phys. 62, S. 23. 1920.

3) J. v. Weißenhoff, a. a. O., S. 27.

4) A. Westgren, Ann. d. Phys. 52, S. 308. 1917.

sehr gut. Westgren hat die richtige (theoretische) Formel nicht finden können, weil er dann nicht nur die drei erwähnten Konstanten, sondern auch noch zwei, die Null sind, hätte ermitteln müssen. Seine Versuche sind aber bei weitem nicht so genau, daß dies möglich ist.

Unter der Voraussetzung, daß der Halbmesser und die Geschwindigkeit der Kugel klein sind, habe ich die allgemeinen Ansätze zur Lösung des fraglichen Problems in meiner Dissertation mitgeteilt.¹⁾ Um eine Vereinfachung dieser Ansätze zu ermöglichen, habe ich diesmal noch die Annahme hinzugefügt, daß der Abstand zwischen den Wänden nicht allzu groß ist. So konnte ich in dem allgemeinen Ansätze den Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0$ (σ ist ein später zu erklärender Parameter) vollziehen. So entstanden die Gleichungen (29)–(32), für die eine einfachere Begründung in §§ 9, 10 mitgeteilt werden wird. Diese Abhandlung ist nämlich so geschrieben, daß man zum Verständnis der folgenden Rechnungen meine Dissertation nicht zu lesen braucht, wenn man nur Formel (23) kennt.

Auf dem Gebiete der zweidimensionalen Flüssigkeitsbewegungen findet sich ein Problem, welches das Gegenstück des vorliegenden ist. Das ist die Bewegung eines Kreiszyinders zwischen zwei parallelen ebenen Wänden. Für die Behandlung dieser Frage schlugen Cowley und Levy²⁾ ein graphisches Verfahren vor. Sie skizzierten ferner ein sukzessives Annäherungsverfahren für die Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Differentialgleichungen. Dabei nahmen sie an, daß die auftretenden Funktionen in Potenzreihen nach σ (siehe § 3) entwickelt werden können. Das ist aber nicht der Fall. Außer σ tritt nämlich auch der absolute Betrag $|\sigma|$ auf.

Bairstow, Cave und Lang³⁾ behandelten dasselbe Problem ausführlicher als Cowley und Levy. Für die Gültigkeit ihrer Rechnungen ist, meiner Vermutung nach, erforderlich, daß die Produkte $\sigma \cdot$ Halbmesser des Zylinders und $\sigma \cdot$ Abstand zwischen den Ebenen klein sind. Um der Bedingung der Ruhe an den Gefäßwänden zu genügen, wenden sie eine Doppel-

1) H. Faxén, Diss., Upps., S. 61–65. 1921. Im Ausdrucke für $g_5 = g_5$ (S. 65) ist ein λ zwischen g_1 und $e^{\zeta(\lambda + \eta)}$ ausgelassen.

2) W. L. Cowley u. H. Levy, Phil. Mag. (6), 41, S. 584. 1921.

3) L. Bairstow, B. M. Cave u. E. D. Lang, Proc. of the Royal Soc. A, 100, S. 394. 1922.

belegung an diesen an. Die Stärke der Doppelbelegung wurde für jede Stelle durch numerische Methoden ermittelt und endlich wurden die Stromlinien festgestellt. Dieses Problem wurde nur vorgeführt, um ihre Rechenmethode zu erhellen. Das Beispiel scheint mir jedoch insofern unglücklich gewählt zu sein, als ihre Methode, die Bedingung der Ruhe an den Wänden zu befriedigen, nicht die beste ist. Mit den im folgenden angewandten Methoden¹⁾ habe ich das Problem so weit geführt, daß nicht viel mehr als die numerischen Rechnungen übrig sind und diese scheinen recht einfach zu werden.

§ 3. Die Leistungsfähigkeit der Stokesschen Differentialgleichungen.

Stokes berechnete bekanntlich den Widerstand, den eine kleine Kugel bei langsamer Bewegung in einer zähen, unbegrenzten Flüssigkeit erfährt. Dabei hatte er durch passende Vereinfachungen die hydrodynamischen Grundgleichungen auf die folgende Form gebracht:

$$(1) \quad \mu \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \mu \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z},$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Hier sind

x, y, z die Koordinaten,

u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten in bezug auf die Richtungen der Koordinatenachsen,

p der Druck,

μ die Zähigkeit,

Δ die Symbole $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Aus den Differentialgleichungen berechnete Stokes die Strömung der Flüssigkeit um die Kugel, und aus der gefundenen Strömung leitete er sein bekanntes Widerstandsgesetz ab, welches in der ersten Annäherung richtig ist, wie viele Proben gezeigt haben. Es stellte sich aber als unmöglich heraus, die Annäherung weiter zu treiben²⁾ oder die Methode auf die Be-

1) Vgl. auch meine Dissertation, S. 8. Siehe ferner C. W. Oseen, Arkiv f. mat., astr. o. fys. 17, Nr. 4. 1922.

2) Whitehead, Quart. Journ. of Math. 1888.

rechnung der Strömung um einen Zylinder anzuwenden.¹⁾ Oseen²⁾ und Lamb zeigten, daß dies seinen Grund darin hat, daß die Gleichungen (1) nicht richtig sind. Der von Stokes gefundene Wert für die Strömung ist demgemäß nur für die nächste Umgebung der Kugel richtig. Ersetzt man (1) durch die richtigeren Oseenschen Gleichungen, so fallen die erwähnten Schwierigkeiten weg. Diese Gleichungen führen leider zu schwierigeren Rechnungen als (1). Ich habe daher versucht, mir klar zu machen, unter welchen Umständen die Gleichungen (1) doch zu richtigen Ergebnissen führen.

Oseen fand, daß seine Einwände gegen (1) dann nicht stichhaltig waren, wenn erstens die Flüssigkeit sich nicht nach allen drei Dimensionen bis ins Unendliche erstreckt und wenn man sich zweitens mit der ersten Annäherung begnügt.³⁾ Die erste Bedingung ist in unserem Problem erfüllt, da die Flüssigkeit ja zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist. Die Flüssigkeit ist nur in bezug auf zwei Dimensionen unendlich.

Die zweite Bedingung fordert, daß gewisse sog. Reynold'sche Zahlen klein sein sollen. Die wichtigste Bedingung ist, daß $\sigma a \cdot \sigma l$ gegen 1 vernachlässigt werden kann. Dabei ist

a der Halbmesser der Kugel,

l der Abstand vom Kugelmittelpunkt zur Wand,

σ gleich $\rho u_0 / 2\mu$,

ρ die Dichte der Flüssigkeit,

μ die Zähigkeit der Flüssigkeit,

u_0 die Geschwindigkeit der Kugel.

Daß der wichtigste Teil der Bedingung so formuliert werden kann, ist eine Vermutung, die durch angenäherte Ausrechnung meiner allgemeinen Ansätze⁴⁾ geprüft werden kann. Ich glaube diese Vermutung aussprechen zu können, weil ich in dem Falle, daß die Flüssigkeit von nur einer ebenen Wand⁵⁾ begrenzt ist, und in dem Falle, daß die Kugel sich längs der

1) G. G. Stokes, *Cambr. Phil. Soc. Trans.* 9. S. [54]. 1851.

2) C. W. Oseen, *Arkiv f. mat., astr. o. fys.* 6. No. 29. 1910.

3) H. Faxén, *a. a. O.* S. 140. Note 1. Wie S. 8 hervorgehoben wurde, hat Oseen den Inhalt dieser Note mündlich angedeutet.

4) H. Faxén, *a. a. O.*, S. 61–65.

5) H. Faxén, *a. a. O.*, S. 115. Vgl. auch *Ann. d. Phys.* 63. S. 581–584. 1920.

Achse einer Röhre¹⁾ bewegt, gerade diese Bedingung, daß $\sigma a \cdot \sigma l$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, gefunden habe. Ferner könnte man gewisse Symmetriegründe heranziehen (vgl. unten).

Im Stokesschen Falle, wenn die Flüssigkeit nach allen Seiten sich ins Unendliche erstreckt, ist der Fehler in der Widerstandsformel von der Größe $\frac{3}{4}\sigma a$ gegen 1. Die Widerstandsformel wird nämlich richtiger, wenn man den Faktor $(1 + \frac{3}{4}\sigma a)$, worin $\frac{3}{4}\sigma a$ das Oseensche Korrektionsglied genannt wird, hinzufügt.²⁾ Wenn σl kleiner als 1 ist, liefern die Gleichungen (1) und (2) nach dem oben gesagten in unserem Falle eine genauere Widerstandsformel als im Stokesschen Falle. Die Wände heben das Oseensche Korrektionsglied $\frac{3}{4}\sigma a$ auf.

Dies erklärt sich folgendermaßen. Wenn die Flüssigkeit unbegrenzt ist, wird sie in gewissem Grade hinter der Kugel mitgerissen. Dadurch wird der Widerstand vergrößert, und dies ist der Grund des Oseenschen Korrektionsgliedes. Wenn die Flüssigkeit aber von Wänden begrenzt ist und der Abstand zwischen Kugel und Wand nicht allzu groß ist, üben die Wände einen beruhigenden Einfluß auf die Strömung aus. Hinter der Kugel kann die Flüssigkeit nicht mehr mitgerissen werden, durch jeden Querschnitt strömt in beiden Richtungen gleich viel Flüssigkeit, die Strömung vor und hinter der Kugel nimmt einen annähernd spiegelsymmetrischen Charakter an. Dann verschwindet auch der Grund des Oseenschen Korrektionsgliedes.

§ 4. Entwicklung nach Kugelfunktionen.

Oberbeck³⁾ und andere entwickelten die Geschwindigkeitskomponenten einer stationären Strömung, die (1) und (2) genügt, nach Kugelfunktionen und verwandten dabei den in der Elastizitätstheorie vorkommenden ähnliche Entwicklungen. Hier soll Lambs⁴⁾ Darstellung dieser Entwicklungen benutzt werden. Die Bezeichnungen von Lamb werden

1) H. Faxén, noch ungedrucktes Manuskript. Vgl. Diss. S. 48.

2) C. W. Oseen, Arkiv f. mat., astr. o. fys. 9. Nr. 16. 1913.

3) Oberbeck, Journ. f. reine u. angew. Math. (Crelle) 81. S. 62. 1876.

4) H. Lamb, Hydrodynamics, 4. Aufl. S. 583—586. Cambridge 1916.

beibehalten und die mit einem L versehenen Hinweise beziehen sich auf das in der Fußnote angegebene Lehrbuch. L 585 (8) bezeichnet also die Formel (8), S. 585, in dem eben-erwähnten Buche.

Φ_n , χ_n und p_n bezeichnen räumliche harmonische Kugelfunktionen, welche im folgenden der Kürze wegen einfach Kugelfunktionen genannt werden.

Wenn man (1) differenziert, so erhält man mit Hilfe von (2)

$$\Delta p = 0.$$

p kann also nach Kugelfunktionen entwickelt werden [vgl. L 584 (4)]:

$$(3) \quad p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n,$$

wobei n die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft. Durch diese Gleichung könnten die Funktionen p_n definiert werden; die endgültige Definition geschieht jedoch durch (4).

Die Strömung, d. h. u , v , w , p , soll nun in den im Ursprunge regulären Teil u_r , v_r , w_r , p_r und den im Ursprunge singulären Teil u_s , v_s , w_s , p_s geteilt werden.

Da die Gleichungen (1) und (2) linear sind, so enthalten u , v , w , p , u_r , usw. als Faktor eine Integrationskonstante, die wir c nennen wollen. Da p_0 und p_{-1} für das Folgende keine Bedeutung haben, erhält man aus (3), wenn man c als Faktor vor die Summenzeichen schreibt:

$$(4) \quad p = p_r + p_s, \quad p_r = c \sum_{n=1}^{\infty} p_n, \quad p_s = c \sum_{n=1}^{\infty} p_{-n-1}.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten können auf die folgende Form gebracht werden [(vgl. L. 585 (8))]

$$u = u_r + u_s - u_0, \quad v = v_r + v_s, \quad w = w_r + w_s.$$

Das Glied $-u_0$ wurde wegen seiner besonderen Bedeutung ausgeschrieben. Da die Kugel sich mit der Geschwindigkeit u_0 bewegt und der Koordinatenursprung, wie gewöhnlich, in den Kugelmittelpunkt gelegt ist, haben die Gefäßwände und die unendlich entfernten Teile der Flüssigkeit diese Geschwindigkeit.

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} u_r &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + u'_r, \\ v_r &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + v'_r, \\ w_r &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} + w'_r. \end{aligned} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} u_s &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1) r^{1-2n}}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial}{\partial x} (r^{2n+1} p_{-n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_{-n-1}}{\partial x} \right\} + u'_s, \\ v_s &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1) r^{1-2n}}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial}{\partial y} (r^{2n+1} p_{-n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_{-n-1}}{\partial y} \right\} + v'_s, \\ w_s &= \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1) r^{1-2n}}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial}{\partial z} (r^{2n+1} p_{-n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{2(2n+1)} \frac{\partial p_{-n-1}}{\partial z} \right\} + w'_s. \end{aligned} \right.$$

Da die Funktionen Φ_0 , χ_0 , Φ_{-1} und χ_{-1} im folgenden keine Rolle spielen, werden sie von Anfang an vernachlässigt, und wir können die folgenden Formeln aufstellen [vgl. L 584 (9)]:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} u'_r &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right), \\ v'_r &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial y} + x \frac{\partial \chi_n}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right), \\ w'_r &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right). \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad \begin{cases} u'_s = c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_{-n-1}}{\partial x} + z \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial z} \right), \\ v'_s = c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_{-n-1}}{\partial y} + x \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial z} - z \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial x} \right), \\ w'_s = c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_{-n-1}}{\partial z} + y \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial x} - x \frac{\partial \chi_{-n-1}}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Für die Bestimmung der Funktionen p_n , Φ_n , χ_n sind die Gleichungen [vgl. L 585 (9) u. (11)]

$$(9) \quad xu + yv + zw = \frac{c}{\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n r^3}{2(2n+3)} p_n + c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \Phi_n,$$

$$(10) \quad x\xi + y\eta + z\zeta = c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n(n+1) \chi_n,$$

nützlich, wobei ξ , η , ζ die Wirbelkomponenten sind.

Es ist also:

$$(11) \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die obigen Ausdrücke für u , v , w , p den Differentialgleichungen (1) und (2) genügen.

§ 5. Die Strömung um eine Kugel.

Die Reihen (5), (6), (7) und (8) sollen nun eine Strömung ohne Gleiten um eine Kugel vorstellen, deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprunge zusammenfällt und deren Halbmesser a ist. Für $r = a$ soll also $u = v = w = 0$ sein, und Aufgabe dieses Paragraphen ist, die daraus folgenden Gleichungen, die p_n , Φ_n , χ_n , p_{-n-1} , Φ_{-n-1} , χ_{-n-1} verbinden, zu finden. Zu diesem Zwecke mögen die neuen Kugelfunktionen p_n^* usw. durch die Gleichungen $a^{2n+1} p_n^* = r^{2n+1} p_{-n-1}$, $a^{2n+1} \Phi_n^* = r^{2n+1} \Phi_{-n-1}$, $a^{2n+1} \chi_n^* = r^{2n+1} \chi_{-n-1}$ erklärt werden.

Wir versuchen, ob etwa die Summe der n ten Glieder in den Ausdrücken für u , v , w , welche man aus (5)–(8) bekommt, gleich Null gesetzt werden kann, wenn $n > 1$. Wenn $\chi_n^* = -\chi_n$ ist, so findet man zunächst:

$$\begin{aligned} - \left(z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} - y \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \right) &= \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \chi_{-n-1} \right) \\ &= \frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}} \left(z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \right) \chi_{-n-1}. \end{aligned}$$

Wenn

$$(12) \quad \chi_{-n-1} = -\frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}} \chi_n$$

ist, so heben sich also die entsprechenden Teile von u_r und u_s an der Kugeloberfläche $r = a$ auf. Aus Symmetriegründen heben sich auch die entsprechenden Teile von v_r , v_s , w_r , w_s an der Kugeloberfläche auf.

Der übrigbleibende Teil von u ist:

$$\begin{aligned} u = & \frac{c}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{r^3}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{n r^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right. \\ & + \mu \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + \frac{(n+1) r^{1-2n} a^{2n+1}}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial p_n^*}{\partial x} - \frac{r^3 a^{2n+1}}{2(2n+1)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n^*}{r^{2n+1}} \\ & \left. + \mu a^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi_n^*}{r^{2n+1}} \right\} - u_0 + \dots \end{aligned}$$

Aus der versuchsweise eingeführten Annahme, daß die Summe der n ten Glieder der Ausdrücke (5)–(8) für u gleich Null ist, folgt mittels (12), daß der obige Klammerausdruck gleich Null ist, wenn $n > 1$. Nun ist die partielle Ableitung nach x , y oder z einer (räumlichen harmonischen) Kugelfunktion n ter Ordnung selbst gleich einer solchen $n-1$ ter Ordnung. Wenn zwei Kugelfunktionen positiver Ordnung sind, können sie sich nur dann aufheben, wenn sie derselben Ordnung sind.

Es ergibt sich also, wenn wir einmal nur die Kugelfunktionen $n-1$ ter Ordnung herausgreifen und $r = a$ setzen:

$$\frac{a^3}{2(2n+1)} \frac{\partial p_n}{\partial x} + \mu \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} + \frac{(n+1)a^3}{n(2n+1)(2n-1)} \frac{\partial p_n^*}{\partial x} = 0.$$

Hier treten nur Ableitungen nach x auf. Wenn man von den Ausdrücken für v oder w ausgegangen wäre, würde man entsprechende Gleichungen bekommen haben, in denen statt der Ableitungen nach x nur Ableitungen nach y bzw. z stünden. Dann gilt:

$$\frac{a^3}{2(2n+1)} p_n + \mu \Phi_n + \frac{(n+1)a^3}{n(2n+1)(2n-1)} p_n^* = C,$$

wobei C die Integrationskonstante ist. Diese würde nun gleich einer Kugelfunktion n ter Ordnung sein, was, da $n > 0$, unmöglich ist, wenn nicht $C = 0$. Wenn wir den Ausdruck für p_n^* einsetzen, bekommen wir:

$$(13) \quad p_{-n-1} = -\frac{n(2n-1)}{2(n+1)} \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}} P_n - \mu \frac{n(2n+1)(2n-1)}{n+1} \frac{a^{2n-1}}{r^{2n+1}} \Phi_n.$$

Eine Ausnahme bildet der Fall $n=1$, wobei das Glied $-u_0$ auch berücksichtigt werden muß:

$$(14) \quad p_{-2} = -\frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} P_1 - \frac{3}{2} \mu \frac{a}{r^3} \Phi_1 + \frac{3}{2} \mu \frac{u_0}{c} \frac{ax}{r^3}.$$

In derselben Weise erhält man aus der Bedingung, daß der erwähnte Klammerausdruck gleich Null sein soll, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \frac{n a^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} - \frac{a^{2n+3}}{2(2n+1)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n^*}{r^{2n+1}} \\ & \quad + \mu a^{2n+1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\Phi_n^*}{r^{2n+1}} = 0, \\ & \frac{n a^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \frac{p_n}{r^{2n+1}} - \frac{a^3}{2(2n+1)} p_{-n-1} + \mu \Phi_{-n-1} = 0, \\ (15) \quad & \left\{ \begin{aligned} \Phi_{-n-1} = & -\frac{n(2n+1)}{4\mu(n+1)(2n+3)} \frac{a^{2n+3}}{r^{2n+1}} P_n \\ & - \frac{n(2n-1)}{2(n+1)} \frac{a^{2n+1}}{r^{2n+1}} \Phi_n. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Auch hier bildet $n=1$ einen Ausnahmefall:

$$(16) \quad \Phi_{-2} = -\frac{3}{40\mu} \frac{a^5}{r^3} P_1 - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \Phi_1 + \frac{a^3 u_0}{4c} \frac{x}{r^3}.$$

Wenn p_n, Φ_n, χ_n (n positiv) gegeben sind, erhält man aus (12)–(15) die zugehörigen Werte von $p_{-n-1}, \Phi_{-n-1}, \chi_{-n-1}$, welche bewirken, daß $u=v=w=0$ an der Kugeloberfläche $r=a$ wird.

§ 6. Die Widerstandsformel.

Auf ein Flächenelement ds der Kugel wirkt an der äußeren Seite eine Spannung, deren x -Komponente ist [vgl. L 586 (15), wo ein fehlerhaftes Vorzeichen vorkommt]:

$$\begin{aligned} p_{r,x} = c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} & \left\{ \frac{n-1}{2n+1} r \frac{\partial p_n}{\partial x} + \frac{2n^3+4n+3}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} r^{2n+2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_n}{r^{2n+1}} \right\} \\ & + \frac{2\mu c}{r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-1) \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} - \frac{\mu c}{r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-1) \left(y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Die resultierende Kraft erhält man durch Integration über die ganze Kugeloberfläche S . Da

$$\begin{array}{llll}
 p_n & \text{eine Kugelfunktion } n\text{-ter Ordnung,} & & \\
 \frac{\partial p_n}{\partial x} & \text{,,} & \text{,,} & n-1\text{ter} \text{ ,,} \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_n}{r^{2n+1}} \right) & \text{,,} & \text{,,} & -n-2\text{ter} \text{ ,,} \\
 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} & \text{,,} & \text{,,} & n-1\text{ter} \text{ ,,} \\
 y \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - z \frac{\partial \chi_n}{\partial y} & \text{,,} & \text{,,} & n\text{ter} \text{ ,,}
 \end{array}$$

ist, und da das Integral über eine Kugelfunktion Null ist, wenn sie nicht 0ter oder -1ter Ordnung ist, so kann nur das folgende Glied von Null verschieden sein:

$$c \frac{2(-2)^2 + 4(-2) + 3}{(-2+1)(-4+1)(-4+3)} \iint_{(S)} r^{-4+2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_{-2}}{r^{-4+1}} ds.$$

Für p_{-2} wird vorläufig geschrieben:

$$p_{-2} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^3}.$$

Wenn man diesen Wert in das obige Integral einsetzt und den Koeffizienten des Integrals vereinfacht, findet man:

$$-c \iint_{(S)} \frac{\alpha}{r^3} ds = -4\pi c \alpha.$$

Der Wert von c ist beliebig. Wenn wir jedoch jetzt für α den Wert 2μ wählen, so ist damit auch der Wert von c festgelegt, denn der Teil $c\alpha x/r^3$ von $c p_{-2}$ läßt sich aus den Grenzbedingungen bestimmen. Wir wollen nun den Wert von c berechnen.

Aus (14) erhält man:

$$r^3 p_{-2} = \alpha x + \beta y + \gamma z = -\frac{a^3}{4} p_1 - \frac{3}{2} \mu a \Phi_1 + \frac{3}{2} \frac{\mu u_0}{c} a x.$$

Man erhält durch Differentiation in bezug auf x :

$$\alpha = -\frac{a^3}{4} \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{3}{2} \mu a \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{\mu u_0}{c} a.$$

Da $a = 2\mu$ ist, so ergibt sich:

$$c = \frac{3}{4} \cdot \frac{u_0 a}{1 + \frac{3}{4} a \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{a^3}{8\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x}}$$

Wenn $(f)_0$ den Wert irgend einer Funktion f im Koordinatenursprunge bezeichnet, so erhält man wegen (4), (5) und (7):

$$(17) \quad c = \frac{3}{4} \cdot \frac{u_0 a}{1 + \frac{3}{4} \frac{a}{c} (u_r)_0 + \frac{a^3}{8\mu c} \left(\frac{\partial p_r}{\partial x} \right)_0}$$

Der Widerstand ist gleich der Kraftkomponente, welche in der Richtung der negativen x -Achse wirkt. Für diese Komponente fanden wir eben den Wert $4\pi c a$. Wenn man die Werte von c und a einsetzt, bekommt man das

Widerstandsgesetz

$$(18) \quad W = \frac{6\pi\mu a u_0}{1 + \frac{3}{4} \frac{a}{c} (u_r)_0 + \frac{a^3}{8\mu c} \left(\frac{\partial p_r}{\partial x} \right)_0}$$

c kommt in dieser Formel nur scheinbar vor. Da u_r und p_r c als Faktor enthalten, so hebt c sich heraus.

Die obige Verfügung über a war willkürlich. Hätten wir einen anderen Wert gewählt, so hätten wir auch eine andere Widerstandsformel bekommen. Der Unterschied ist jedoch nur scheinbar. In Wirklichkeit bekommt man natürlich immer dieselbe Widerstandsformel.

§ 7. Nebenbemerkung.

Die Widerstandsformel (18) hatte ich ursprünglich mittels der Sätze II¹⁾ und IV meiner Diss., S. 53, 54 und mittels des folgenden Satzes bewiesen:

Es wird vorausgesetzt, daß eine Strömung um eine Kugel (Halbmesser = a) in zwei Teile, die alle beide den Differentialgleichungen (1), (2) Genüge leisten, zerlegt werden kann und daß kein Gleiten an der Kugeloberfläche stattfindet. Der erste Teil (u, v, w, p) soll außerhalb der Kugel regulär sein und in unendlicher Entfernung verschwinden, während der zweite Teil (u, v, w, p) eine innerhalb der Kugel reguläre Fortsetzung besitzen soll. Die Komponenten der auf die Kugel ausgeübten Gesamtkraft sind gleich

$$6\pi\mu a (u_r)_0 + \pi a^3 \left(\frac{\partial p_r}{\partial x} \right)_0, \quad 6\pi\mu a (v_r)_0 + \pi a^3 \left(\frac{\partial p_r}{\partial y} \right)_0, \\ 6\pi\mu a (w_r)_0 + \pi a^3 \left(\frac{\partial p_r}{\partial z} \right)_0.$$

1) Den Satz II findet man übrigens in Kirchhoffs Vorlesungen über math. Physik. Leipzig (in der dritten Aufl. [1883], S. 377).

Das von derselben Strömung auf die Kugel ausgeübte Moment hat die Komponenten

$$4\pi\mu a^3 \left(\frac{\partial w_r}{\partial y} - \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)_0, \quad 4\pi\mu a^3 \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial w_r}{\partial x} \right)_0, \\ 4\pi\mu a^3 \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial u_r}{\partial y} \right)_0.$$

Wieder bezeichnet eine mit dem Index 0 versehene Parenthese, daß von der eingeklammerten Funktion der Wert im Kugelmittelpunkte gemeint ist.

Wenn man diesen Satz mittels der Formeln in den Paragraphen 4–6 beweisen will, muß man berücksichtigen, daß u_0 hier in u , mit einbezogen ist.

Wenn man die Stromstärke mittels ihrer Einwirkung auf kleine Kugeln hat schätzen wollen, hat man bis jetzt einfach das Stokessche Widerstandsgesetz benutzt. Hier fanden wir als Korrektionsglied eine Druckgradienten.

Für die Anwendung muß man natürlich bemerken, daß in der unmittelbaren Umgebung der Kugel keine Volumkräfte wirken dürfen, denn sonst befriedigt die Strömung die Gleichungen (1) nicht, auf die der ganze Beweis aufgebaut ist. Das ist der Grund, weshalb unser Satz, z. B. für den archimedischen Auftrieb nicht den richtigen Wert gibt.

§ 8. Die Berechnung von $(u_r)_0$ und $\left(\frac{\partial p_r}{\partial x}\right)_0$.

In der Widerstandsformel (18) sind die in der Überschrift erwähnten Ausdrücke noch unbekannt. u_r , v_r , w_r , p_r wurde als der im Kugelmittelpunkte reguläre Teil der Strömung definiert und die mit dem Index 0 versehene Parenthese bedeutet, daß für die eingeklammerte Funktion der Wert im Kugelmittelpunkte gemeint ist.

Für die Berechnung der fraglichen Ausdrücke ist ein sukzessives Annäherungsverfahren zweckmäßig. Zunächst setzen wir die Ausdrücke für diejenige Strömung an, welche Stokes bei seiner Berechnung des Widerstandes gegen die Bewegung einer kleinen Kugel fand.

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= -u_0 + u_s = -v_0 + c \left[\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} + a^2 \left(\frac{1}{3r^3} - \frac{x^2}{r^5} \right) \right], \\ v_s &= c \left[\frac{xy}{r^3} - a^2 \frac{xy}{r^5} \right], \\ w_s &= c \left[\frac{xz}{r^3} - a^2 \frac{xz}{r^5} \right], \\ p_s &= 2\mu c \frac{x}{r^3}. \end{aligned} \right.$$

Wenn die Flüssigkeit nach allen Seiten unendlich ausgedehnt ist, findet man nach Stokes $c = \frac{3}{4} a u_0$. Hier soll jedoch der durch (17) angegebene Wert von c angewendet werden. Dieser Wert geht übrigens in den Stokesschen über, wenn keine Wände da sind, d. h. wenn

$$(u_r)_0 = \left(\frac{\partial p_r}{\partial r} \right)_0 = 0$$

ist. Mittels (6) und (8) kann man auch den Ansatz (19) in der folgenden Weise

$$(20) \quad p_{-2} = 2 \mu \frac{x}{r^3}, \quad \Phi_{-2} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{x}{r^3}, \quad \chi_{-2} = 0$$

schreiben. Die Bestimmung von p_{-2} ist ersichtlich in Übereinstimmung mit § 6.

Der nächste Schritt der sukzessiven Annäherung ist, eine innerhalb des Gefäßes reguläre Teilströmung, u_r, v_r, w_r, p_r , so zu bestimmen, daß nach Addition der Teilströmung (19) die resultierende Strömung der Bedingung der Ruhe an den Gefäßwänden genügt. Die so bestimmte Teilströmung u_r, \dots, p_r soll die (von den Gefäßwänden) zurückgeworfene Strömung genannt werden.

Die zurückgeworfene Strömung muß in unendlich entfernten Teilen der Flüssigkeit sich dem Wert Null nähern. Die in den folgenden Kapiteln vorkommenden Strömungen und Teile von solchen erfüllen von selbst diese Bedingung, die uns also keine Schwierigkeiten bereitet.

Die Hauptschwierigkeit ähnlicher Abhandlungen wie der vorliegenden ist, für die zurückgeworfene Strömung einen Ausdruck zu finden, der bei numerischen Rechnungen anwendbar ist. Wie diese Schwierigkeit in unserem Falle bewältigt wird, zeigt Kap. II.

Von dem Ansätze (19), (20) ausgehend, findet man zunächst die dazu gehörige zurückgeworfene Strömung. Diese ist, wie oben gesagt, regulär im Kugelmittelpunkte und läßt sich nach Kugelfunktionen mit positiven Indizes entwickeln. Diese Kugelfunktionen mögen mit

$$p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots, \Phi_1^{(1)}, \chi_1^{(1)}, \dots$$

bezeichnet werden. Da man aus $p_1^{(1)}$ und $\Phi_1^{(1)}$ die Werte von $(u_r)_0$ und $\left(\frac{\partial p_r}{\partial x} \right)_0$ in unserem Falle berechnen kann und umgekehrt, so wurden diese Kugelfunktionen schon bei der Be-

rechnung der Widerstandsformel (18) in § 6 berücksichtigt. Die übrigen Kugelfunktionen sollten nun bei der weiter getriebenen Annäherung durch Kugelfunktionen mit negativen Indizes aufgehoben werden (§ 5).

Der Ansatz (20) sollte nun unter Berücksichtigung der eben erwähnten Kugelfunktionen geändert werden. Dies bringt eine Verbesserung der zurückgeworfenen Strömung mit sich. Auch für die in der Widerstandsformel (18) vorkommenden Größen $(u_r)_0$ und $\left(\frac{\partial p_r}{\partial x}\right)_0$ würde man eine Korrektur erhalten. Die Einflüsse dieser Glieder sind aber so klein, daß sie unberücksichtigt bleiben können. Wir brauchen also nur den von (19), (20) hervorgerufenen Teil der zurückgeworfenen Strömung zu berechnen, der

$$u^* + u^{**}, v^* + v^{**}, w^* + w^{**}, p^* + p^{**}$$

genannt werden soll (§ 10 usw.).

Kapitel II. Der Bedingung der Ruhe an den ebenen Wänden formal zu genügen.

§ 9. Zwei Fouriersche Integrale.

Es sollen die folgenden Bezeichnungen angewandt werden. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist r der Abstand zwischen dem Punkte (x, y, z) und dem Ursprunge. Es besteht also der Zusammenhang

$$(21) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

α und β sind zwei Integrationsveränderliche. Ferner soll

$$(22) \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\sigma i \alpha$$

sein, wobei k und der reelle Teil von λ positiv sein sollen.

i ist die imaginäre Einheit, also $i^2 = -1$.

σ ist ein Parameter, dessen genaue Bedeutung für das folgende belanglos ist. σ wurde übrigens S. 93 definiert.

$||$ bezeichnet den absoluten Betrag einer reellen oder komplexen Größe.

Es besteht die Gleichung¹⁾

$$(23) \quad \frac{1}{r} e^{-|\sigma| r - \sigma z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - \lambda |z|} \frac{d\alpha d\beta}{\lambda}.$$

1) Vgl. H. Faxén, a. a. O., S. 30.

Aus dieser Gleichung erhält man, wenn man σ gleich Null setzt¹⁾

$$(24) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{d\alpha d\beta}{k}.$$

Diese Funktion selbst und ihre partiellen Ableitungen kommen bekanntlich in der Stokesschen Lösung des Problems der Bewegung einer kleinen Kugel vor (S. 102). Wenn man den Einfluß ebener Wände berechnen will, bringt man am besten die Funktion $1/r$ auf die obige Form. Um auch die übrigen in der Stokesschen Lösung vorkommenden Funktionen auf ähnliche Formen bringen zu können, berechnet man den Grenzwert:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma r} [e^{-|\sigma| r - \sigma z} - 1].$$

Wenn σ durch reelle positive Werte sich dem Wert Null nähert, so ist der obige Ausdruck gleich

$$-1 - \frac{x}{r}.$$

Aus (23) und (24) findet man ferner, daß der obige Ausdruck gleich

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \left(\frac{k}{\lambda} e^{(k-\lambda)|z|} - 1 \right) \frac{d\alpha d\beta}{\sigma k}$$

ist. Der Klammerausdruck soll in eine Taylorsche Reihe nach σ entwickelt werden. Wenn f eine komplexe Funktion ist, so gilt bekanntlich

$$(25) \quad \begin{cases} f(\sigma) = f + \frac{\sigma}{1!} f' + \dots + \frac{\sigma^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)} \\ \quad + \frac{\sigma^n}{n!} [f_r^{(n)}(\theta \sigma) + i f_i^{(n)}(\theta_1 \sigma)]. \end{cases}$$

Hier sind

σ eine reelle oder komplexe Zahl,

θ und θ_1 positive Zahlen, die kleiner als 1 sind,

$f_r^{(n)}$ und $f_i^{(n)}$ der reelle bzw. imaginäre Teil der n ten Ableitung $f^{(n)}$ von f .

1) Vgl. H. Faxén, a. a. O., S. 28.

Man findet also:

$$(26) \quad \frac{k}{\lambda} e^{(k-\lambda)|z|} - 1 = \frac{\sigma}{1!} \left[\frac{i\alpha}{k^2} + \frac{i\alpha}{k} |z| \right] + \frac{\sigma^2}{2!} [R\varphi(\theta) + J\varphi(\theta_1)].$$

Hier bedeutet R den reellen und J den imaginären Teil des nachstehenden Ausdruckes, $\varphi(\theta)$ den Ausdruck

$$-k\alpha^2 \left(\frac{3}{\lambda_1^5} + \frac{3|x|}{\lambda_1^4} + \frac{|x|^2}{\lambda_1^3} \right) e^{(k-\lambda_1)|z|},$$

worin $\lambda_1^2 = k^2 - 2\theta\sigma ia$ ist.

Setzt man nun den Ausdruck (26) in das obige Doppelintegral ein, so kann man nachher die Integration nicht für jedes Glied einzeln ausführen, denn die Integrale divergieren. Die Ableitungen der zweiten Ordnung der Integrale sind aber konvergent. Es gilt daher z. B.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{x}{r} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \left(\frac{i\alpha}{k^2} + \frac{i\alpha}{k} |z| \right) d\alpha d\beta \\ &+ \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{R\varphi(\theta) + J\varphi(\theta_1)}{k} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Man beweist ohne Schwierigkeit, daß das letzte Integral für alle Werte von σ endlich, konvergent und numerisch kleiner als eine von σ unabhängige Funktion von $|z|$ ist. Dann ist der letzte Grenzwert gleich Null.

Für alle Ableitungen der zweiten Ordnung findet man ähnliche Verhältnisse. Daraus schließt man, daß für die Ableitungen der ersten Ordnung Gleichungen gelten, die vom folgenden Typus sind:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \left(\frac{i\alpha}{k^2} + \frac{i\alpha}{k} |z| \right) d\alpha d\beta + C,$$

wobei C eine sogleich zu bestimmende Konstante ist. Die Wichtigkeit dieser Gleichung und aller ihr ähnlichen folgt daraus, daß die Ableitungen beider Seiten gleich sind.

Läßt man $|z|$ immer größere Werte annehmen, so findet man aus der letzten Gleichung, daß C gleich Null ist. Es ergeben sich also die folgenden drei Gleichungen

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{\alpha^2}{k^3} (1 + k|z|) d\alpha d\beta, \\ -\frac{xy}{r^3} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{\alpha\beta}{k^3} (1 + k|z|) d\alpha d\beta, \\ -\frac{xz}{r^3} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{i\alpha}{k} z d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Für die Stokessche Strömung — System (19) — findet man mit Hilfe von (24) und (27) den folgenden Ausdruck:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= -u_0 + \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left[\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} (1 + k|z|) + \frac{\alpha^2 \alpha^2}{3k} \right] d\alpha d\beta, \\ v &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left[-\frac{\alpha\beta}{k^3} (1 + k|z|) + \frac{\alpha^2 \cdot \alpha\beta}{3k} \right] d\alpha d\beta, \\ w &= \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left[-\frac{i\alpha}{k} z + i\alpha \cdot \alpha^2 \cdot \frac{z}{3|z|} \right] d\alpha d\beta, \\ p &= \frac{c\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \left[-\frac{i\alpha}{k} \right] d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die obigen Doppelintegrale den Differentialgleichungen (1) und (2) genügen.

§ 10. Ansätze.

Das System (28) stellt ein spezielles Beispiel von Lösungen des Systems (1), (2) dar. Diese Lösungen entsprechen dem Fall, daß die Flüssigkeit unendlich ausgedehnt ist. Nun soll aber die Flüssigkeit von zwei ebenen Wänden begrenzt sein, es muß eine neue Lösung des Systems (1), (2), die zurück-

geworfene Strömung (vgl. § 8), hinzuaddiert werden, damit die Geschwindigkeitskomponenten $u + u_0$, v , w an den Wänden Null werden. Es ist zweckmäßig, schon von vornherein eine umfassende formale Lösung des Problems der Zurückwerfung aufzusuchen, und zwar soll zunächst das System (28) verallgemeinert werden. Man sieht leicht, daß die folgenden Ansätze Lösungen von (1), (2) sind:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{i\alpha}{k} g_2 + \frac{2g_1}{k} - \frac{g_1 \alpha^2}{k^3} (k|z| + 1) + \frac{\alpha^2 \pi}{k} g_3 \right\} d\alpha d\beta, \\ v &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} i\beta \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{g_2}{k} + \frac{i\alpha}{k^3} g_1 (k|z| + 1) - \frac{i\alpha \pi}{k} g_3 \right\} d\alpha d\beta, \\ w &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \\ &\quad \cdot \left\{ -\frac{\pi}{|x|} g_2 - \frac{\pi i\alpha}{k} g_1 + \frac{i\alpha}{k} g_3 (|z|k + 1) \right\} d\alpha d\beta, \\ p &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k|z|} \frac{i\alpha}{k} \\ &\quad \cdot \left\{ -g_1 + \frac{\pi}{|x|} k g_3 \right\} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Diese Ansätze habe ich anfangs aus dem System (6), S. 62 meiner Dissertation gefunden, und zwar habe ich damals zunächst

$g_2 - \frac{g_1}{\sigma} + \frac{\pi}{|x|} k \frac{g_3}{\sigma}$ statt g_2 , $\frac{g_1}{\sigma}$ statt g_1 und $\frac{g_3}{\sigma}$ statt g_3 geschrieben und habe dann den Grenzübergang $\sigma \rightarrow 0$ gemacht. Man braucht aber diesen Weg nicht zu gehen, man braucht sich nur davon zu überzeugen, daß die obigen Ansätze den Differentialgleichungen genügen.

Die Bewegung einer Kugel in einer unbegrenzten Flüssigkeit — d. h. der Stokessche Fall — wird durch

$$(30) \quad g_1 = c, \quad g_2 = -\frac{1}{3} c i \alpha \cdot a^2, \quad g_3 = 0$$

dargestellt.

Um den Grenzbedingungen $u = v = w = 0$ an den Wänden genügen zu können, brauchen wir noch folgende zwei Systeme von Lösungen von (1), (2):

$$(31) \left\{ \begin{aligned} u^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k z} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{i\alpha}{k} g_5 + \frac{2}{k} g_4 - \frac{\alpha^2}{k^3} g_4 (zk + 1) + \frac{\alpha^2}{k} g_6 \right\} d\alpha d\beta, \\ v^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k z} i\beta \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{g_5}{k} + \frac{i\alpha}{k^3} g_4 (zk + 1) - \frac{z i\alpha}{k} g_6 \right\} d\alpha d\beta, \\ w^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k z} \\ &\quad \cdot \left\{ -g_5 - \frac{i\alpha z}{k} g_4 + \frac{i\alpha}{k} g_6 (zk + 1) \right\} d\alpha d\beta, \\ p^* &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) - k z} \frac{i\alpha}{k} \{-g_4 + k g_6\} d\alpha d\beta; \end{aligned} \right.$$

$$(32) \left\{ \begin{aligned} u^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) + k z} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{i\alpha}{k} g_8 + \frac{2}{k} g_7 + \frac{\alpha^2}{k^3} g_7 (zk - 1) + \frac{\alpha^2 z}{k^3} g_9 \right\} d\alpha d\beta, \\ v^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) + k z} i\beta \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{k} g_8 + \frac{i\alpha}{k^3} g_7 (1 - zk) - \frac{z i\alpha}{k} g_9 \right\} d\alpha d\beta, \\ w^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) + k z} \\ &\quad \cdot \left\{ g_8 - \frac{z i\alpha}{k} g_7 - \frac{i\alpha}{k} g_9 (zk - 1) \right\} d\alpha d\beta, \\ p^{**} &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y) + k z} \frac{i\alpha}{k} \{-g_7 - k g_9\} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Für die rechte Wand hat man $z = b$ und für die linke $z = -l$. Es soll für diese Werte von z

$u + u^* + u^{**} = v + v^* + v^{**} = w + w^* + w^{**} = 0$ sein. So erhält man z. B.

$$0 = [u + u^* + u^{**}]_{z=-l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} \cdot \left\{ \frac{i\alpha}{k} (g_2 e^{-kl} + g_5 e^{kl} + g_8 e^{-kl}) \right. \\ + \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} \right) (g_1 e^{-kl} + g_4 e^{kl} + g_7 e^{-kl}) \\ - \frac{\alpha^2 l}{k^3} (g_1 e^{-kl} - g_4 e^{kl} + g_7 e^{-kl}) \\ \left. - \frac{\alpha^2 l}{k} (g_3 e^{-lk} + g_6 e^{lk} + g_9 e^{-lk}) \right\} d\alpha d\beta.$$

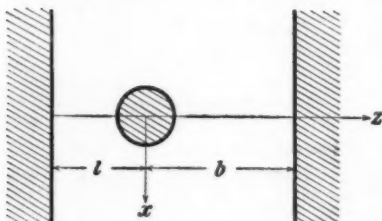


Fig. 1.

Da diese Gleichung für alle Werte der Variablen x, y gilt, so muß der Ausdruck in den geschweiften Klammern verschwinden. Auf diese Weise erhält man die erste der folgenden Gleichungen. Die beiden übrigen folgen aus den Bedingungen, daß an der linken Wand $v + v^* + v^{**} = 0$ und $w + w^* + w^{**} = 0$ sein sollen. Statt e^{2kl} wird s geschrieben.

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{i\alpha}{k} (g_2 + g_5 s + g_8) + \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} \right) (g_1 + g_4 s + g_7) \\ \quad - \frac{\alpha^2 l}{k^3} (g_1 - g_4 s + g_7) - \frac{\alpha^2 l}{k} (g_3 + g_6 s + g_9) = 0, \\ i\beta \left\{ \frac{1}{k} (g_2 + g_5 s + g_8) + \frac{i\alpha}{k^3} (g_1 + g_4 s + g_7) \right. \\ \quad \left. + \frac{i\alpha l}{k^3} (g_1 - g_4 s + g_7) + \frac{i\alpha l}{k} (g_3 + g_6 s + g_9) \right\} = 0, \\ g_2 + g_8 - g_5 s + \frac{i\alpha}{k} l (g_1 + g_4 s + g_7) \\ \quad + \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_6 s + g_9) + l i \alpha (g_3 - g_6 s + g_9) = 0. \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise erhält man aus der Bedingung, daß die Flüssigkeit an der rechten Wand ($z = b$) haftet, die folgenden drei Gleichungen, worin t statt e^{2kb} geschrieben ist.

$$(34) \left\{ \begin{aligned} & \frac{i\alpha}{k} (g_2 + g_5 + g_8 t) + \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} \right) (g_1 + g_4 + g_7 t) \\ & \quad - \frac{\alpha^2}{k^2} b (g_1 + g_4 - g_7 t) + \frac{\alpha^2 b}{k} (g_3 + g_6 + g_9 t) = 0, \\ & i\beta \left\{ \frac{1}{k} (g_2 + g_5 + g_8 t) + \frac{i\alpha}{k^3} (g_1 + g_4 + g_7 t) \right. \\ & \quad \left. + b \frac{i\alpha}{k^3} (g_1 + g_4 - g_7 t) - b \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_6 + g_9 t) \right\} = 0, \\ & -g_2 - g_5 + g_8 t - \frac{i\alpha}{k} b (g_1 + g_4 + g_7 t) \\ & \quad + b i\alpha (g_3 + g_6 - g_9 t) + \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_6 + g_9 t) = 0. \end{aligned} \right.$$

Nach Vereinfachung ergibt sich:

$$(35) \quad g_7 = -\frac{s-1}{st-1} g_1, \quad g_4 = -\frac{t-1}{st-1} g_1.$$

$$(36) \left\{ \begin{aligned} & g_2 + g_5 + g_8 s - 2l \frac{i\alpha}{k} g_4 s + l i\alpha (g_3 + g_6 + g_9 s) = 0, \\ & g_2 + g_5 - g_8 s \quad \quad \quad + l i\alpha (g_3 + g_6 - g_9 s) \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_6 + g_9 s) = 0, \\ & g_2 + g_5 + g_8 t - 2b \frac{i\alpha}{k} g_7 t - b i\alpha (g_3 + g_6 + g_9 t) = 0, \\ & -g_2 - g_5 + g_8 t \quad \quad \quad + b i\alpha (g_3 + g_6 - g_9 t) \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \frac{i\alpha}{k} (g_3 + g_6 + g_9 t) = 0. \end{aligned} \right.$$

§ 11. Auflösung des Gleichungssystems (36).

Das System (36) läßt sich nicht weiter vereinfachen. Wenn man

$$(37) \quad N = (st - 1)^2 - 4k^2 st(l + b)^2$$

setzt, so erhält man nach einigen Rechnungen:

$$(38) \left\{ \begin{aligned} & g_5 = \frac{1}{N} g_2 [st^2(2lk - 1) + st(2lk - 1)(2bk - 1) \\ & \quad \quad \quad + t(2bk + 1) + 4l^2 k^2 st - 1] \\ & - \frac{2st i\alpha l}{k N} g_4 [st(lk - 1) + 2b^2 k^2 + (lk + 1)(2bk + 1)] \\ & - \frac{2tb i\alpha}{k N} g_7 [2l^2 st k^2 - bk - 1 + st(bk - 1)(2lk - 1)] \\ & + \frac{i\alpha k t}{N} g_3 [2l^2 st - 2b^2 s(2lk - 1) - 2l^2 s(2bk + 1) - 2b^2], \end{aligned} \right.$$

$$(39) \left\{ \begin{aligned} g_5 &= \frac{1}{N} g_2 [s^2 t (2bk - 1) + 4b^3 k^2 st + st(2lk - 1) \\ &\quad (2bk - 1) + s(2lk + 1) - 1] \\ &\quad - \frac{2ls i \alpha}{kN} g_4 [2stb^2 k^2 + st(lk - 1)(2bk - 1) - lk - 1] \\ &\quad - \frac{2bst i \alpha}{kN} g_7 [st(bk - 1) + 2l^2 k^2 + (bk + 1)(2lk + 1)] \\ &\quad - \frac{s i \alpha k}{N} g_8 [2stb^2 - 2tb^2(2lk + 1) - 2tl^2(2bk - 1) - 2l^2], \end{aligned} \right.$$

$$(40) \left\{ \begin{aligned} g_6 &= -\frac{2tk}{i \alpha N} g_2 [st + 2sk(l + b) - 1] \\ &\quad + \frac{2lst}{N} g_4 [st - 2k(l + b) - 1] \\ &\quad + \frac{2bt}{N} g_7 [2stk(l + b) - st + 1] - \frac{1}{N} g_8 [t^2 s(2lk + 1) \\ &\quad - 4stb^2 k^2 - st(2lk + 1)(2bk + 1) + t(2bk - 1) + 1], \end{aligned} \right.$$

$$41) \left\{ \begin{aligned} g_9 &= \frac{2sk}{i \alpha N} g_2 [st - 1 + 2tk(l + b)] \\ &\quad - \frac{2ls}{N} g_4 [2kst(b + l) - st + 1] \\ &\quad - \frac{2bst}{N} g_7 [st - 2k(b + l) - 1] - \frac{1}{N} g_8 [s^2 t(2bk + 1) \\ &\quad - 4stk^2 l^2 - st(2lk + 1)(2bk + 1) + s(2lk - 1) + 1]. \end{aligned} \right.$$

Nach (31), (32) ist endlich:

$$(42) \left\{ \begin{aligned} &\left[u^* + u^{**} + \frac{a^2}{6\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p^* + p^{**}) \right]_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{i \alpha}{k} (g_5 + g_9) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{k} - \frac{a^2}{k^3} \right) (g_4 + g_7) + \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a^2}{k} (g_4 + g_7 - kg_6 + kg_9) \right\} d\alpha d\beta. \end{aligned} \right.$$

Kapitel III.

Bewegung in der Mittelebene zwischen zwei parallelen Wänden.

§ 12. Berechnung der Widerstandsformel.

Es soll die in der Widerstandsformel (18) vorkommende unbekannte Konstante

$$\frac{3}{4} \frac{a}{c} (u_r)_0 + \frac{a^2}{8\mu c} \left(\frac{\partial p_r}{\partial x} \right)_0 = \frac{3}{4} \frac{a}{c} \left[u^* + u^{**} + \frac{a^2}{6\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p^* + p^{**}) \right]_0$$

berechnet werden. Die Funktionen u^* , p^* usw. werden durch (31) und (32) erklärt. In diesen Systemen treten g_5 , g_9 usw.

auf, für welche die Ausdrücke in diesem Spezialfalle besonders einfach werden. In diesem Kapitel ist nämlich aus Symmetriegründen

$$b = l, \quad s = t, \quad g_5 = g_8, \quad g_6 = -g_9,$$

und man kann in der ersten Annäherung $g_3 = 0$ setzen [vgl. § 8 und Gl. (30)]. Es ergibt sich aus (35) und (36):

$$(43) \quad \begin{cases} g_4 = -\frac{g_1}{s+1}, & g_6 = -\frac{2skg_2}{i\alpha(s^2-4lks-1)} - \frac{2ls(s-1)g_1}{(s^2-4lks-1)(s+1)}, \\ g_8 = \frac{2lks-s+1}{s^2-4lks-1} g_2 - \frac{2li\alpha}{k} \cdot \frac{s}{s+1} - lks & g_1. \end{cases}$$

Wir bemerken zunächst, daß die Integralausdrücke (31) und (32) und alle ihre Ableitungen endlich und begrenzt sind, wenn der Punkt (x, y, z) sich zwischen den Wänden befindet, oder genauer, wenn $|z| < 2l$ ist. $u^* + u^{**}, v^* + v^{**}$ usw. sind regulär innerhalb der Flüssigkeit und erfüllen also auch diese an die erste zurückgeworfene Strömung gestellte Forderung (vgl. § 8).

Die Ausdrücke (43) sollen nun in (42) eingesetzt werden. Für g_1 und g_2 sind die Werte (30) geeignet. Es ergibt sich

$$\left[u^* + u^{**} + \frac{\alpha^2}{6\mu} \frac{\partial}{\partial x} (p^* + p^{**}) \right]_0 = -\frac{4c}{3l} A + \frac{4c\alpha^2}{3l^3} B - \frac{4c\alpha^4}{3l^5} C,$$

worin

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{3l}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad \left\{ \left(\frac{2}{k} - \frac{\alpha^2}{k^3} \right) \frac{1}{s+1} - \frac{2l\alpha^2}{k^2} \cdot \frac{s}{s+1} - lks \right\} d\alpha d\beta, \end{aligned} \right.$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} B &= \frac{l^3}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\alpha^2}{k} \cdot \frac{2lks-s+1}{s^2-4lks-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha^2}{k} \left[\frac{1}{s+1} - \frac{2lks(s-1)}{(s^2-4lks-1)(s+1)} \right] \right\} d\alpha d\beta, \end{aligned} \right.$$

$$(46) \quad C = \frac{l^5}{6\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 sk}{s^2-4lks-1} d\alpha d\beta.$$

Nach (18) und dem oben Gesagten erhalten wir dann die Widerstandsformel

$$(47) \quad W = \frac{6\pi\mu a u_0}{1 - \frac{a}{l} A + \frac{a^3}{l^3} B - \frac{a^5}{l^5} C}.$$

§ 13. Berechnung der Konstanten A , B , C .

Nach (22) und § 10 ist

$$k^2 = a^2 + \beta^2, \quad s = e^{2ki}.$$

Ferner setzen wir:

$$(48) \quad k = \frac{x}{l}, \quad \alpha = \frac{x}{l} \cos \vartheta, \quad \beta = \frac{x}{l} \sin \vartheta,$$

wobei x eine neue Integrationsvariable ist, welche nicht mit der früher benutzten Koordinate x verwechselt werden darf. Wenn man die Koordinaten x und ϑ in (44) einsetzt und nach ϑ integriert, so ergibt sich:

$$A = \frac{3}{4} \int_0^\infty \left\{ \frac{3}{s+1} - 2xs \frac{\frac{s-1}{s+1} - x}{s^2 - 4xs - 1} \right\} dx.$$

Das Integral wird in zwei Teile zerlegt, von denen der erste sogleich ohne Schwierigkeit integriert wird.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{3}{s+1} dx &= \frac{9}{8} \int_1^\infty \frac{ds}{s(s+1)} = \frac{9}{8} \left[\log \frac{s}{s+1} \right]_1^\infty \\ &= \frac{9}{8} \log 2 = 0,77979 \dots \end{aligned}$$

Der zweite Teil des Ausdruckes für A wird geschrieben:

$$\frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{x - \frac{s-1}{s+1}}{s^2 - 4xs - 1} xs dx.$$

Der Integrand wurde für $x = 0; 0,2; 0,4 \dots; 3,0$ numerisch ausgerechnet und das Integral von 0 bis 3,0 mittels Simpsons und Cote's Regeln¹⁾ ermittelt. Für den Rest des obigen Integrals wurde die Abschätzung

1) J. Bertrand: Calcul intégral. Paris 1870. S. 331 ff. — E. Heine: Kugelfunktionen II. Berlin (in der 2. Aufl. [1881], S. 6).

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (x-1+2s^{-1})(1+4xs^{-1}+16x^2s^{-2})s^{-1}x\,dx \\ = \frac{1}{2}x^2s^{-1} + s^{-2}\left(x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{32}\right) \\ + s^{-3}\left(\frac{8}{3}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{8}{9}x^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

angewandt. Ich habe für das ganze Integral den Wert 0,14957 erhalten und 0. Emersleben 0,1495s [vgl. die Tabelle unten, wo der betreffende Integrand mit $\varphi_1(x)$ bezeichnet ist]. Es ergibt sich also:

$$A = 0,77979 \dots + \frac{3}{2} \cdot 0,1495s = 1,0041.$$

B berechnet man auf dieselbe Weise. Wenn man den Variablenuaustausch (48) in (45) ausführt und nach ϑ integriert findet man

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{(4x-1)s^3+1}{(s^3-4xs-1)(s+1)} x^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{s+1} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{s(s-1)x^2 dx}{(s^3-4xs-1)(s+1)} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{s+1}. \end{aligned}$$

Das letzte Integral läßt sich auf die folgende Weise berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{s+1} &= \int_0^{\infty} x^2 (e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - \dots) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} - \dots \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots \right) = \frac{s_2}{4} - \frac{2}{4 \cdot 8} s_2 = \frac{8}{16} s_2, \end{aligned}$$

wobei

$$s_2 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots = 1,20205 \dots$$

ist.¹⁾ Man findet also:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{s+1} = 0,11269 \dots$$

Für das erste Integral im letzten Ausdrucke für B habe ich den Wert 0,530s und Emersleben 0,530s gefunden [vgl. die folgende Tabelle, wo der betreffende Integrand mit $\varphi_2(x)$

1) E. E. Kummer, Journ. f. Math. 16, S. 211. 1837.

Tabelle 1.

x	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$
0,0	0	0	0
0,2	0,02441	0,0736	0,0746
0,4	0,04552	0,138	0,1452
0,6	0,06103	0,187	0,209
0,8	0,07012	0,219	0,264
1,0	0,07327	0,234	0,307
1,2	0,07169	0,235	0,338
1,4	0,06681	0,225	0,356
1,6	0,05999	0,208	0,363
1,8	0,05229	0,188	0,358
2,0	0,04448	0,165	0,343
2,2	0,03708	0,143	0,322
2,4	0,03038	0,121	0,296
2,6	0,02451	0,102	0,267
2,8	0,01952	0,084	0,237
3,0	0,01537	0,069	0,207

bezeichnet wird]. Es wurde für die Berechnung des Integrals von 3 bis ∞ die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \int_x^{\infty} x^3 s^{-1} (1 - s^{-1}) (1 + 4xs^{-1} + 16x^2 s^{-2}) (1 - s^{-1}) dx \\
 = s^{-1} \left(\frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x + \frac{3}{8} \right) \\
 + s^{-2} \left(x^4 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{8} x^2 + \frac{3}{16} x + \frac{3}{64} \right) \\
 + s^{-3} \left(\frac{8}{3} x^5 + \frac{8}{9} x^4 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

angewandt.

Es ergibt sich also $B = 0,4179$.

Wenn man den Ausdruck für C vereinfacht, findet man

$$C = \frac{1}{6} \int_0^{\infty} \frac{x^4 s}{s^3 - 4xs - 1} dx.$$

Für die Berechnung dieses Integrals zwischen den Grenzen 3 und ∞ wendet man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \int_x^{\infty} x^4 s^{-1} (1 + 4xs^{-1} + 16x^2 s^{-2}) dx \\
 = s^{-1} \left(\frac{1}{2} x^4 + x^3 + \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{3}{4} \right) \\
 + s^{-2} \left(x^5 + \frac{5}{4} x^4 + \frac{5}{4} x^3 + \frac{15}{16} x^2 + \frac{15}{32} x + \frac{15}{128} \right) \\
 + s^{-3} \left(\frac{8}{3} x^6 + \frac{8}{3} x^5 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

an. Für das Integral habe ich den Wert 1,01₈ gefunden und Emersleben 1,01₁₆. Es ergibt sich also $C = 0,168$.

Wenn man die gefundenen Werte von A , B , C in (47) einsetzt, so entsteht die Widerstandsformel

$$(49) \quad W = \frac{6 \pi \mu a u_0}{1 - 1,004 \cdot \frac{a}{l} + 0,418 \cdot \frac{a^3}{l^3} - 0,169 \cdot \frac{a^5}{l^5}}.$$

Für die Berechnung dreier Integrale wurden, wie oben erwähnt, numerische Methoden angewandt. Die entsprechenden Integranden sind

$$\varphi_1(x) = \frac{x - \frac{s-1}{s+1}}{s^3 - 4xs - 1} xs,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{x^3 s(s-1)}{(s^3 - 4xs - 1)(s+1)}, \quad \varphi_3(x) = \frac{x^4 s}{s^3 - 4xs - 1}.$$

In der vorstehenden Tabelle sind die von Emersleben berechneten Werte von φ_1 und die von mir berechneten von φ_2 , φ_3 abgedruckt.

§ 14. Vergleich mit Westgrens Messungen.

Westgren¹⁾ beobachtete das Fallen kleiner Kugeln von Mastix oder Gummigutt in Wasser, welches zwischen zwei ebenen Wänden eingeschlossen war. Die Wände waren während der Beobachtungen annähernd vertikal und der gegenseitige Abstand, welcher mit $2l$ bezeichnet wurde, oben größer als unten. Es wurde die Zeit z gemessen, welche eine Kugel brauchte, um eine gewisse Strecke b zu fallen. b war stets gleich lang und die entsprechende Fallzeit wurde in verschiedenen Teilen des Gefäßes gemessen. Die zu einer und derselben Kugel gehörigen Fallzeiten, welche in der Mitte zwischen den Ebenen gemessen waren, wurden nebst den entsprechenden Wandabständen in einer Tabelle zusammengestellt. Aus Beobachtungen auf neun Kugeln erhielt er also neun Tabellen. Nun wollen wir diese Tabellen mit der Widerstandsformel (49) vergleichen.

Die Schwere der Kugel, in Wasser gewogen, mag S sein. Da die Fallgeschwindigkeit u_0 gleich b/z ist, und da der Widerstand gleich S sein muß, so ergibt sich aus (49):

$$z \left(1 - 1,004 \frac{a}{l} + 0,418 \frac{a^3}{l^3} - 0,169 \frac{a^5}{l^5} \right) = \frac{6 \pi \mu a b}{S}.$$

1) A. Westgren, a. a. O.

Tabelle 2.

Zu Westgrens Tabelle Nr.								
8			9			10		
a/l	z	z_0	a/l	z	z_0	a/l	z	z_0
0,063	18,8	17,6	0,068	14,0	13,0			
0,067	18,8	17,5	0,074	14,0	12,9			
0,042	19,0	17,4	0,086	14,4	13,1	0,103	9,2	8,3
0,046	19,0	17,3	0,097	14,4	13,0	0,109	9,4	8,4
0,105	19,2	17,2	0,113	14,8	13,1	0,12	9,6	8,4
0,114	19,6	17,4	0,13	15,0	13,1	0,14	9,8	8,4
0,17	20,6	17,1	0,17	15,8	13,1	0,16	10,2	8,6
0,17	20,4	16,9	0,18	16,0	13,2	0,18	10,2	8,4
0,21	22,0	17,4	0,23	16,8	13,0	0,25	11,0	8,3
0,25	22,0	16,6	0,27	17,4	12,8	0,26	11,0	8,2
0,29	24,6	17,7	0,31	19,2	13,4	0,35	12,4	8,2
0,36	25,8	16,9	0,38	21,0	13,4	0,38	13,0	8,4
0,43	29,8	17,9	0,51	27,0	14,4	0,44	13,8	8,2
0,52	33,2	17,7	0,71	36,2	14,8	0,58	19,0	9,3
0,65	40,0	17,6	0,71	36,4	14,9	0,60	18,8	8,9
0,69	43,4	18,2						

Das rechte Glied stellt die Fallzeit z_0 dar, wenn keine Wände da sind und soll daher für eine und dieselbe Kugel konstant bleiben. Jede Westgrensche Tabelle entspricht, wie oben gesagt, einer einzigen Kugel und für jede Beobachtung kann z_0 leicht berechnet werden. Wenn alles richtig ist, soll z_0 für jede Westgrensche Tabelle konstant ausfallen.

In Tabelle 2 sind drei Werte von z , welche aus drei von Westgrens Tabellen genommen sind, mit den aus denselben Tabellen berechneten a/l und n_0 zusammengestellt.

Man sieht, daß, wenn $a/l < 0,3$, alles sehr gut stimmt. Für größere Werte von a/l bekommt man meistens ein wenig zu hohe Werte für z_0 . Dasselbe Ergebnis erhält man auch aus den sechs übrigen Tabellen von Westgren.

Für die Abweichung am Ende jeder Tabelle kann man sich verschiedene Ursachen denken. Für die Ermittlung des wirklichen Sachverhalts wären weitere Versuche erwünscht.

Ergebnis.

Eine kleine starre Kugel erfährt, wenn sie sich in der Mitte zwischen zwei parallelen ebenen Wänden parallel zu diesen bewegt, den Widerstand

$$W = \frac{6 \pi \mu a u_0}{1 - 1,004 \frac{a}{l} + 0,418 \frac{a^2}{l^2} - 0,169 \frac{a^3}{l^3}}.$$

Hierbei ist

- a der Halbmesser der Kugel,
- u_0 die Geschwindigkeit der Kugel,
- μ die Zähigkeit,
- $2l$ der Abstand zwischen den Wänden.

Wenn die in § 3 erklärte Bedeutung von σ beibehalten wird, können die Voraussetzungen für die Gültigkeit des obigen Widerstandsgesetzes vermutlich¹⁾ auf die folgende Weise formuliert werden:

1. $\sigma a \cdot \sigma l$ und $(a/l)^6$ können gegen 1 vernachlässigt werden.
2. Die Teilchen (Moleküle oder Molekülkomplexe) der Flüssigkeit sind im Verhältnis zur Kugel sehr klein.
3. Die ebenen Wände und die Kugeloberfläche sind die einzigen Begrenzungen der Flüssigkeit.
4. Zwischen Kugel und Flüssigkeit oder Wand und Flüssigkeit findet kein Gleiten statt.

Uppsala, 6. Februar 1922.

1) Vgl. die analogen Verhältnisse, wenn die Flüssigkeit von nur einer Wand begrenzt ist! Diese wurden in meiner Dissertation genau berechnet (S. 112—116). Das Wort „vermutlich“ bezieht sich auf die Bedingung 1.

(Eingegangen 22. Februar 1922.)

3. *Die Zahl der von sehr schwachen Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen;* *von J. Herweg und G. Mie.*

Im Jahre 1915 hat Hr. Erich Hoepner in d. Zeitschr.¹⁾ über eine Zählung der von Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen berichtet, die er auf die Anregung des einen von uns ausgeführt hatte. Bei dieser Zählung hatte sich das sonderbare Ergebnis herausgestellt, daß die Zahl der von äußerst schwachen Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen im Verhältnis zur Intensität kleiner war als das bei stärkerer Röntgenstrahlung gefundene Verhältnis. Eine Nachprüfung zeigte uns indessen, daß dieses Ergebnis auf irgendeinem Versehen Hrn. Hoepners beruhen müsse, denn so oft wir auch die Zählung wiederholten, konnten wir niemals eine Abnahme des Verhältnisses feststellen. Wir haben deswegen die Zählung noch einmal ausgeführt, wobei wir den Abstand der bestrahlten Metallplatte von der Antikathode der Röntgenlampe in den Grenzen 1—20 m änderten.

Die Versuche sind noch im Greifswalder Institut ausgeführt, und zwar mit demselben Auffangegefäß, das Hr. Hoepner benutzt und in Fig. 1 seiner Arbeit (a. a. O. S. 578) dargestellt hat, aber mit der von ihm nur einmal gelegentlich benutzten Aluminiumscheibe (a. a. O. S. 597). Die Versuchsanordnung änderten wir insofern, als wir nicht, wie Hr. Hoepner, die kleinen Stöße, die man nur mit dem Elektrometer beobachten kann, benutzten, sondern die sehr viel stärkeren, welche man leicht bei einer geringen Erhöhung der angelegten Spannung bekommt. Wir registrierten sie mit Hilfe eines Edelmannschen Saitengalvanometers, dessen Saite in bekannter Weise auf einen schmalen Schlitz projiziert wurde, hinter welchem ein

1) E. Hoepner, Ann. d. Phys. **46**, S. 577. 1915.

photographischer Film vorbeilief. Die von uns benutzten stärkeren Stromstöße sind mit dem identisch, was man gewöhnlich „Spitzenentladungen“ nennt. Man kann diese Entladungen mit gut ausgeruhtem Auge direkt an einer schwachen Leuchterscheinung im verdünnten Gas beobachten. Das Licht unterscheidet sich von dem der regelrechten Glimmentladung, welche erst bei höheren Spannungen einsetzt, ganz auffallend dadurch, daß es keine Spur von irgendwelchen Schichten zeigt. Hr. E. Reiche hat diese eigentümlichen, immer stoßweise erfolgenden Entladungen, welche bei Spannungen unterhalb der eigentlichen Glimmentladungsspannung auftreten, später¹⁾ im Greifswalder Institut genauer untersucht. Die Benutzung der „Spitzenentladungen“ bietet zwei Vorteile: Erstens kann man die angelegte Spannung innerhalb ziemlich weiter Grenzen, mindestens um einige Volt variieren, während Hr. Hoepner die Spannung bis auf Zehntelvolt genau regulieren mußte (a. a. O. S. 580), zweitens kann man durch Benutzung des Saitengalvanometers größere Stoßzahlen registrieren, als es mit dem Quadrantenelektrometer möglich ist.

Wenn man die Methode der Spitzenentladung, wie wir es getan haben, bei niedrigen Gasdrucken anwendet, kann man aber leicht dadurch Fehler bekommen, daß bei nicht genügend hoher Spannung Entladungen ausfallen. Wie nämlich Hr. E. Reiche in seiner eben erwähnten Arbeit (a. a. O. S. 119ff.) gezeigt hat, bekommt man auch bei reichlicher Ionisierung, wenn man weit genug unter der Spannung der Glimmentladung bleibt, nur wenig Stöße in der Minute und ihre Zahl steigt von Volt zu Volt mehr und mehr an. Man darf also nur dann erwarten, daß jedes von den Röntgenstrahlen ausgelöste Elektron wirklich einen Stoß hervorbringt, wenn die angelegte Spannung nicht zu weit unter der eigentlichen Entladungsspannung liegt und wenn man bei einer Änderung der Spannung um einige Volt unter sonst unveränderten Verhältnissen immer dieselbe Zahl von Stößen bekommt. Wir machten hierüber zunächst einige Vorversuche bei einem Druck, der etwas größer war als 1 cm Quecksilber. Unmittelbar vor dem Auffaßgefäß war eine Bleiblende angebracht mit einer kreisförmigen Öffnung von 8 mm Durchmesser. Die Entfernung der Röntgenlampe von der Bleiblende betrug 10 m. Wir gingen zunächst

1) E. Reiche, Ann. d. Phys. 52. S. 109. 1917.

mit der Spannung so hoch wie möglich herauf, d. h. bis dicht unter die Spannung, bei der Glimmentladung einsetzte, und gingen dann im Verlauf der Versuche stufenweise um 2 Volt und um 4 Volt herunter. Die Spannung der Röntgenlampe wurde mit einer nebengeschalteten Funkenstrecke von Zeit zu Zeit gemessen, der Strom ab und zu an einem kleinen Drehspulensinstrument abgelesen.

Blende 8 mm. Entfernung 10 m.

Zeit.	4' 11' 12' 13' 14' 15'	18' 19' 20'	22' 23' 24' 25' 26' 27' 28'
Spannung . .	Höchste Spannung	2 Volt weniger	4 Volt weniger
Stöße pro Min.	57 48 43 43 44	45 54 45	46 40 40 41 43 35 37
Funkenlänge	36 mm 36 mm		36 mm
Galvanometer	13,5 13,0	13,0	13,0

Die Verminderung der Spannung um 2 Volt zieht noch keine Verminderung der Zahl der Stöße nach sich, geht man aber um 4 Volt herunter, so wird die Zahl der Stöße durchschnittlich doch schon etwas kleiner. Bei den drei verschiedenen Spannungen ist die Zahl der Stöße pro Minute im Mittel: 47; 48; 40. Nun wiederholten wir dieselben Versuche mit einer Blende von 6 mm Durchmesser.

Blende 6 mm. Entfernung 10 m.

Zeit.	4' 33' 34' 35' 36' 37'	39' 40' 41' 42' 43'	46' 47' 48' 49' 50'
Spannung . .	Höchste Spannung	2 Volt weniger	4 Volt weniger
Stöße pro Min.	23 23 34 29 32	30 27 30 26 24	19 36 31 29 20
Funkenlänge			38 mm
Galvanometer	12,7	13,0	12,2

In diesem Falle ergibt sich bei jeder der drei Spannungen im Durchschnitt fast dieselbe Stoßzahl in der Minute, nämlich: 28; 27,4; 27.

Man sieht also, daß das Ausfallen von Stößen bei zu kleiner angelegter Spannung erst bei größeren Stoßzahlen bemerkbar wird.

Ohne Röntgenstrahlen bekommt man durchschnittlich in jeder Minute einen Stoß. Demnach ist die Zahl der ausgelösten Elektronen bei Verwendung der 8 mm-Blende gleich 46,5, bei der 6 mm-Blende 26,5. Diese beiden Zahlen verhalten sich in der Tat fast genau so wie die Flächen der beiden Blenden 0,50 : 0,282.

Wir untersuchten weiter, ob die Zahl der beobachteten Stöße vom Druck abhinge. Bei den Drucken 13,5 mm und

8,5 mm ergaben sich unter sonst gleichen Umständen gleiche Stoßzahlen. Ging man aber mit dem Druck noch weiter herunter, auf 3 mm, so stellten sich Schwierigkeiten ein. Es traten dann außerordentlich leicht flackernde Glimmentladungen auf, und sobald man, um sie zu vermeiden, mit der Spannung nur ganz wenig herunterging, ergaben sich zu kleine Stoßzahlen. Man kann allgemein sagen, daß der brauchbare Bereich der Spannungen um so breiter ist, je höher der Gasdruck. Wir blieben bei unseren definitiven Versuchen deswegen immer über 10 mm Hg, vielleicht wäre es besser gewesen, auf mehrere Zentimeter hinauf zu gehen, doch reichte dann die uns verfügbare Spannung von 1000 Volt nicht mehr ganz aus.

Für die Spannung der Röntgenlampe haben wir folgende Tabelle:

Funkenlänge	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40 mm
Spannung	57	58	59	59	60	61	61	62	62	63	64 KV.

Der Ausschlag des Galvanometers war der Stromstärke proportional, und zwar entsprach ein Ausschlag von 13,0 Skalenteilen der Stromstärke 10^{-4} Amp. Berechnen wir die Zahl der Stöße pro Quadratcentimeter und pro Sekunde, so ergeben die beiden für die Entfernung 10 m gefundenen Zahlen 46,5 und 26,5 umgerechnet: 1,55 und 1,57. Die Spannung war 61 KV., der Strom 0,1 mA. Nehmen wir an, was freilich nicht ganz richtig sein wird, die Intensität der Röntgenstrahlen sei dem zugeführten Effekt proportional und rechnen wir den Mittelwert der Stoßzahlen 1,56 noch um auf 60 KV. und 0,1 mA., so bekommen wir:

$$n = 1,53.$$

Diese Zahl n wollen wir die reduzierte Stoßzahl nennen. Hr. Hoepner hat die Reduktionsrechnung für 65 KV. und 0,1 mA. gemacht, er würde also $n = 1,66$ rechnen.

Die weiteren Versuche wurden alle mit der Blende 8 mm ausgeführt. Wir fingen an mit der Entfernung 10 m, gingen dann auf 15 m und auf 20 m. In der Entfernung 20 m machten wir verhältnismäßig viele Zählungen, nämlich 16 Min., weil die kleine Zahl der Stöße verhältnismäßig sehr starke Schwankungen aufweist. Dann gingen wir auf 15 m und 10 m zurück. Zwischendurch wurde auch die Zahl der Stöße ohne

Röntgenbestrahlung festgestellt, es ergab sich ganz wie früher durchschnittlich 1 Stoß in der Minute. Nach der Subtraktion von 1 ergibt sich als mittlerer Wert der

Stoßzahl pro Min.	in der Entfernung	Spannung	Strom
29,3	10 m	59 KV.	0,055 mA.
12,2	15 „	59 „	0,052 „
5,7	20 „	59 „	0,051 „

Reduziert auf 1 qcm, 1 Sek., 60 KV., 0,1 mA. ist:

in der Entfernung 10 m 15 m 20 m
die Zahl der Stöße 1,80 0,80 0,38

Vergleicht man die beiden an zwei verschiedenen Tagen für 10 m gefundenen Werte: 1,53 und 1,80 miteinander, so sieht man, daß die von uns gemachte Annahme, nach welcher die Intensität der Röntgenstrahlung dem der Röhre zugeführten Effekt proportional sein soll, nicht richtig sein kann. Die Spannung war in beiden Versuchsreihen wenig verschieden, dagegen war die Stromstärke in der ersten Versuchsreihe: 0,1 mA., in der zweiten: 0,055 mA. Offenbar ist der Nutzeffekt der Röhre bei der größeren Stromstärke etwas schlechter gewesen als bei der kleineren. Da während der zweiten Versuchsreihe der Strom nur wenig geschwankt hat, ist es erlaubt, die Röntgenstrahlenintensität hier dem zugeführten Effekt proportional zu setzen, und wir werden deshalb im folgenden mit den auf 60 KV. und 0,1 mA. reduzierten Elektronenzahlen rechnen.

Kurz darauf haben wir noch Versuche bei kleineren Entfernungen: 1 m; 1,5 m; 2 m, angestellt. Dabei wurde dieselbe Blende mit 8 mm Öffnung benutzt. Um nicht zu viele Stöße zu bekommen, wurde in den Weg der Röntgenstrahlen ein rotierender Sektor eingeschaltet, eine Kreisscheibe aus dickem Bleiblech, die auf der Achse eines kleinen Elektromotors saß. Die Scheibe hatte in der Nähe des Randes einen Schlitz von 3 mm Breite, die Entfernung der Stelle, wo die Röntgenstrahlen zu der 8 mm-Blende hindurchgingen, von der Rotationsachse betrug 65 mm. Daraus ergibt sich, daß die Zeitdauer der Röntgenbestrahlung durch den rotierenden Sektor auf den Bruchteil $3 : 130\pi = 0,735 \cdot 10^{-2}$ herabgesetzt wird. Die Versuche begannen bei 1 m Entfernung, darauf gingen wir auf

1,5 m und 2 m. Nachdem wir bei der Entfernung 2 m 10 Min. lang registriert hatten, gingen wir noch einmal auf 1,5 m und 1 m zurück. Zwischendurch wurde mehrmals die Zahl der Stöße ohne Röntgenstrahlen bestimmt, sie betrug wieder 1 in einer Minute. Nach Subtraktion von 1 ergibt sich als mittlerer Wert der

StoßzahlproMin.	in der Entfernung	Spannung	Strom
19,1	1,0 m	60 KV.	0,0485 mA.
10,8	1,5 "	61 "	0,049 "
6,9	2,0 "	61 "	0,0515 "

Reduziert auf 1 qcm, 1 Sek., 60 KV., 0,1 mA. ist:

in der Entfernung	1 m	1,5 m	2 m
die Zahl der Stöße	180	98,3	59,8

Wir stellen die gefundenen Resultate in einer Tabelle zusammen. In der ersten Kolonne steht die Entfernung l von der Röntgenröhre in Metern, in der zweiten die dazu gehörende reduzierte Zahl der emittierten Elektronen n , in der dritten diese Zahl multipliziert mit dem Quadrat der Entfernung, wobei als Einheit 10 m genommen ist, also $n \cdot l^2/100$. Die in der dritten Kolonne stehenden Zahlen nehmen mit wachsender Entfernung ab, weil die Röntgenstrahlen in der Luft absorbiert werden. Man kann den Absorptionskoeffizienten für 1 m auf etwa 0,03 schätzen, diese Zahl läßt sich mit den von Hrn. Hoepner angestellten Messungen (a. a. O. S. 597) sehr wohl vereinigen. In der vierten Kolonne ist das Produkt $2,45 \cdot e^{-0,03 \cdot l}$ aufgeführt. Die Zahlen der vierten Kolonne stimmen mit denen der dritten innerhalb der Fehlergrenzen überein. Daß die Zahl für 1 m zu klein gefunden worden ist, kann seinen Grund darin haben, daß die Spannung beim Zählen vielleicht nicht hoch genug war. Wir haben oben gesehen, daß dadurch leicht Abweichungen von dieser Größe entstehen können.

Entfernung: l	Red. Zahl d. Stöße: n	$n \cdot \frac{l^2}{100}$	$2,45 \cdot e^{-0,03 \cdot l}$
1,0 m	180	1,80	2,38
1,5 "	98,3	2,21	2,34
2,0 "	59,8	2,35	2,31
10 "	1,80	1,80	1,84
15 "	0,80	1,80	1,56
20 "	0,38	1,52	1,35

Vergleichen wir unsere Zahlen mit denen, welche Hr. Hoepner in den Entfernungen 6,9 m und 12,8 m gefunden hat, so sind unsere Zahlen ungefähr halb so groß, wie die Hoepnerschen. Das muß auch so sein, weil wir an Stelle der Platinscheibe eine Aluminiumscheibe benutzt haben.¹⁾ Erst bei den größeren Entfernungen sind Hrn. Hoepners Zählungen fehlerhaft geworden.

Das Resultat unserer Untersuchung ist:

Die Zahl der von einer Metallscheibe durch Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen ist auch bei den allergeringsten Intensitäten, wenn aus der Fläche 1 qcm während einer Minute nur wenige Elektronen emittiert werden, stets der Intensität der Röntgenstrahlen proportional.

Dieses Resultat beweist, daß entsprechend den Vorstellungen der modernen Quantentheorie, die Absorption der Strahlung selbst bei den schwächsten Intensitäten, wenn in 1 Sek. durch 1 qcm nur noch wenige Energiequanten hindurchgehen, doch stets quantenhaft erfolgt.

Praktisch kann man das Resultat vielleicht verwerten, um eine Methode der absoluten Intensitätsmessung ganz schwacher Röntgenstrahlen auszuarbeiten. Wenn man aus der Lenardschen Schrift „Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten“ (Heidelberg 1918) die Daten über die Absorption der ausgelösten Elektronen in dem Metall der Scheibe entnimmt, kann man aus der Zahl der austretenden Elektronen berechnen, wieviel in einer Schicht von bestimmter Dicke überhaupt ausgelöst worden sind, oder mit anderen Worten, wieviel Energiequanten von der Röntgenstrahlung in dieser Schicht absorbiert sind. Man muß nun noch den Absorptionskoeffizienten des Metalls für die betreffende Wellenlänge kennen, dann kann man die Intensität der Strahlung selber absolut berechnen.

Halle a. S., Physikalisches Institut. April 1922.

1) Vgl. E. Hoepner, a. a. O. S. 598.

(Eingegangen 26. April 1922.)

4. Der Temperaturkoeffizient der magnetischen Doppelbrechung; von G. Szivessy.

Inhalt: *I. Einleitung.* § 1. Ziel der Untersuchung. § 2. Temperaturabhängigkeit der magnetischen Doppelbrechung nach der molekularen Orientierungstheorie. § 3. Bisherige Beobachtungen. — *II. Versuchsanordnung.* § 4. Optischer Teil der Versuchsanordnung. § 5. Magnetfeld und Flüssigkeitsstrog. § 6. Herstellung konstanter Temperaturen und ihre Messung. § 7. Gang einer Messung; Bestimmung von Brechungsindex und Dichte. — *III. Ergebnisse.* § 8. Allgemeines über die Messungsergebnisse. § 9. Nitrobenzol. § 10. Chlorbenzol. § 11. Brombenzol. § 12. Pseudocumol. § 13. α -Bromnaphthalin. § 14. Zusammenfassung.

I. Einleitung.

§ 1. *Ziel der Untersuchung.* Cotton und Mouton¹⁾ verdankt man den Nachweis, daß reine diamagnetische Flüssigkeiten in einem Magnetfelde doppelbrechend werden wie ein optisch einachsiger Kristall, dessen Achsenrichtung in die Feldrichtung zu liegen kommt. Durchsetzt also ein linear polarisierter Lichtstrahl eine solche, in einem Magnetfelde befindliche Flüssigkeit normal zur Feldrichtung und ist seine Polarisationssebene gegen die Feldrichtung geneigt, so tritt er elliptisch polarisiert aus. Bedeutet l die Länge der durchstrahlten Flüssigkeitsschicht und H die Stärke des Magnetfeldes, so besteht nach den Beobachtungen von Cotton und Mouton²⁾ für die relative Verzögerung ψ zwischen außerordentlicher und ordentlicher Welle die Beziehung

$$(1) \quad \psi = ClH^2.$$

Der Proportionalitätsfaktor C hängt von der Natur der Flüssigkeit, ihrer Temperatur, sowie von der Wellenlänge der

1) A. Cotton u. H. Mouton, C. R. 145. S. 229. 1907.

2) A. Cotton, H. Mouton u. P. Weiß, C. R. 145. S. 870. 1907; A. Cotton u. H. Mouton, Ann. chim. phys. (8) 19, S. 169. 1910.

Strahlung ab; wird Ψ in Wellenlängen, l in cm und H in Gauß ausgedrückt, so heißt C die *Cotton-Moutonsche Konstante*.

Die magnetische Doppelbrechung gehorcht also einem ganz ähnlichen Gesetz wie der elektrooptische Kerreffekt, denn für diesen gilt bekanntlich

$$\Psi = B l E^2,$$

wo Ψ und l dieselbe Bedeutung haben wie vorhin, E die äußere elektrische Feldstärke und B die *Kerrsche Konstante* ist.

Zur Erklärung beider Arten künstlicher Doppelbrechung pflegt man anzunehmen¹⁾, daß die einzelnen Moleküle der isotropen Flüssigkeit in optischer, elektrischer und magnetischer Hinsicht anisotrop, aber ganz regellos gelagert sind; durch die Wirkung des äußeren (magnetischen oder elektrischen) Feldes erhalten sie jedoch eine teilweise Orientierung, wobei die Wärmebewegung hemmend entgegenwirkt. Diese Vorstellung wurde von Langevin²⁾ mit den Methoden der statistischen Mechanik quantitativ ausgearbeitet unter der Annahme, daß die Moleküle anisotrop gebundene Oszillatoren sind, die durch die Einwirkung des äußeren Feldes ein Moment und dadurch eine Ausrichtung erhalten.

Für den elektrooptischen Kerreffekt hat später Born³⁾ die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie unter der Annahme erweitert, daß die Moleküle der Flüssigkeit von vornherein Debyesche elektrische Momente besitzen. Die Beeinflussung dieser fertigen Momente durch die äußeren Felder der umgebenden Moleküle, die bei Born unberücksichtigt blieb, ist neuerdings von Gans⁴⁾ untersucht worden.

Jede dieser verschiedenen Formen der molekularen Orientierungstheorie führt beim elektrooptischen Kerreffekt zu einem anderen Gesetz für die *Temperaturabhängigkeit der Kerrschen Konstante*. In mittleren Temperaturbereichen wird die Langevinsche Theorie zwar von den Beobachtungen be-

1) A. Cotton u. H. Mouton, C. R. 147. S. 193. 1908; 150. S. 774. 1910; Ann. chim. phys. 19. S. 153. 1910; 20, S. 194. 1910.

2) P. Langevin, C. R. 151. S. 475. 1910; Le Radium 7. S. 249. 1910.

3) M. Born, Ann. d. Phys. 55. S. 215. 1918.

4) R. Gans, Ann. d. Phys. 64. S. 481. 1921.

stätigt, wie die Messungen von Bergholm¹⁾ und mir²⁾ gezeigt haben; aber mit den Ergebnissen der Untersuchungen, die von Lyon und Wolfram³⁾ bei tiefen, von Bergholm⁴⁾ bei höheren Temperaturen angestellt wurden, ist weder die Langevinsche, noch die Bornsche Theorie vereinbar, und es scheint, daß sie in ihren Einzelheiten auch von der Gansschen Theorie nicht richtig wiedergegeben werden.⁵⁾

Bei der magnetischen Doppelbrechung sind die Folgerungen, die sich aus der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie für die *Temperaturabhängigkeit der Cotton-Moutonschen Konstante* ergeben, bisher noch nicht nachgeprüft worden; die vorliegende Untersuchung wurde unternommen, um zur Ausfüllung dieser Lücke beizutragen.

§ 2. *Temperaturabhängigkeit der magnetischen Doppelbrechung nach der molekularen Orientierungstheorie.* Nimmt man an, daß die anisotropen Moleküle rhombische Symmetrie besitzen⁶⁾, und berücksichtigt man ferner, daß die magnetische Suszeptibilität bei diamagnetischen Flüssigkeiten verschwindend klein ist, daher das innere Feld gleich dem äußeren gesetzt werden darf, so ergibt die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie für die Cotton-Moutonsche Konstante den Ausdruck⁷⁾

$$(2) \quad C = \frac{\kappa(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{20 R \lambda \vartheta \alpha n} (\tau_{12} \tau_{12}' + \tau_{23} \tau_{23}' + \tau_{31} \tau_{31}').$$

Hierbei bedeutet n den Brechungsindex der ursprünglich isotropen Flüssigkeit, κ ihre Suszeptibilität, z die Anzahl der Grammoleküle pro Volumeinheit, R die auf ein Grammolekül bezogene Gaskonstante ($R = 8,31 \cdot 10^7$), ϑ die absolute Temperatur und λ die Wellenlänge der auffallenden Strahlung.

1) C. Bergholm, Ann. d. Phys. 51. S. 414. 1916.

2) G. Szivessy, Zeitschr. f. Phys. 2. S. 30. 1920.

3) N. Lyon und F. Wolfram, Ann. d. Phys. 63. S. 739. 1020.

4) C. Bergholm, Ann. d. Phys. 65. S. 128. 1921.

5) Vgl. hierzu P. Lertes, Zeitschr. f. Phys. 6. S. 257. 1921; 8. S. 72. 1921; N. Lyon, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 64. 1921; C. Bergholm, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 68. 1921.

6) W. Voigt, Gött. Nachr., Math. phys. Kl. S. 577. 1912; A. Enderle, Zur Theorie der elektrischen und magnetischen Doppelbrechung von Flüssigkeiten. Dissertation. Freiburg i. B., 1912.

7) A. Enderle, a. a. O., § 6, Gl. (40).

Für die Größen τ, τ' ist zu setzen:

$$\tau_{12} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \quad \tau_{23} = \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \quad \tau_{31} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3},$$

$$\tau'_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}, \quad \tau'_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}, \quad \tau'_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3};$$

durch die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 wird die magnetische, durch die (von der Wellenlänge der Strahlung abhängenden) Parameter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die optische Anisotropie des einzelnen rhombisch-symmetrischen Moleküls bedingt. Bezeichnet man mit N die Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit, so gelten die weiteren Beziehungen

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \frac{3\kappa}{N}, \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{9}{4\pi N} \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}.$$

Berücksichtigt man ferner, daß

$$z = \frac{\delta}{M}$$

gesetzt werden kann, falls δ die Dichte, M das Molekulargewicht der Flüssigkeit bedeutet, so ergibt sich für C aus (2) folgender Ausdruck:

$$C = \frac{\pi M N^2 (n^2 + 2)^2}{135 R \lambda \vartheta \delta n} \left\{ (\mu_1 - \mu_2)(\sigma_1 - \sigma_2) + \dots \right\}.$$

Da zwischen N und δ Proportionalität besteht, so läßt sich hierfür auch schreiben:

$$C = \varrho \frac{\delta (n^2 + 2)^2}{\lambda \vartheta n} \left\{ (\mu_1 - \mu_2)(\sigma_1 - \sigma_2) + \dots \right\},$$

wo ϱ von der Temperatur und der Wellenlänge unabhängig ist. Wird angenommen, daß die molekularen Parameter $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ von der Wärmebewegung nicht abhängen, und führt man die Abkürzung

$$(3) \quad P = \frac{\delta (n^2 + 2)^2}{\vartheta n}$$

ein, so muß das Verhältnis

$$(4) \quad Q = \frac{C}{P}$$

bei konstant gehaltener Wellenlänge von der Temperatur unabhängig sein.

Dies ist das Gesetz der Temperaturabhängigkeit der Cotton-Moutonschen Konstante, wie es sich aus der Langevinschen mole-

kularen Orientierungstheorie ergibt. Für die Temperaturabhängigkeit der Kerrschen Konstante liefert diese Theorie bekanntlich eine ähnliche Beziehung, die aber wegen des Eingehens der Dielektrizitätskonstante ϵ etwas komplizierter ist, indem P noch mit $(\epsilon + 2)^3$ multipliziert erscheint; der entsprechende Faktor fällt aber bei der magnetischen Doppelbrechung fort, weil die Suszeptibilität diamagnetischer Flüssigkeiten außerordentlich klein ist und sich zudem mit der Temperatur fast nicht ändert.

Die experimentelle Nachprüfung der Formel (4) liefert eine Möglichkeit, zu entscheiden, ob die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie die Erscheinungen der magnetischen Doppelbrechung richtig wiedergibt.

§ 3. *Bisherige Beobachtungen.* Die bisherigen Beobachtungen reichen zu dieser Entscheidung nicht aus. Über die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Doppelbrechung liegt nämlich nur eine Untersuchung von Cotton und Mouton¹⁾ vor, die Beobachtungen an Nitrobenzol, α -Bromnaphthalin und salizylsaurem Phenyl (in unterkühltem Zustande) angestellt haben. Da von ihnen aber Brechungsindizes und Dichten dieser Flüssigkeiten für die einzelnen Temperaturen nicht ermittelt wurden, so können ihre Messungen nicht ohne weiteres zur Prüfung der Formel (4) benutzt werden.

Für salicylsaures Phenyl sind Brechungsindex und Dichte im unterkühlten Zustande in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur nicht bekannt; für Nitrobenzol und α -Bromnaphthalin liegen aber Bestimmungen dieser Temperaturfunktionen durch andere Beobachter vor, auf die man zurückgreifen muß, um die Cotton-Moutonschen Ergebnisse für unsere Zwecke ausnutzen zu können.

Die von Cotton und Mouton benutzte Wellenlänge war $\lambda = 578 \mu\mu$; der Brechungsindex des Nitrobenzols für diese Strahlung ergab sich bei $\vartheta = 293^\circ$ abs. zu $n = 1,5537$. Die Abhängigkeit des Brechungsindex des Nitrobenzols von der Temperatur ϑ wurde von Falk²⁾ für die Wellenlängen

1) A. Cotton u. H. Mouton, C. R. 149. S. 340. 1909; Ann. chim. phys. 20. S. 235. 1910.

2) K. G. Falk, Journ. Amer. Chem. Soc. 31. S. 809. 1909.

$\lambda = 656, 589$ und $486 \mu\mu$ ermittelt. Durch Interpolation aus den Falkschen Werten folgt:

$$\frac{dn}{d\vartheta} = -0,000469 \text{ für } \lambda = 578 \mu\mu.$$

Für die Dichte δ des Nitrobenzols und ihre Temperaturabhängigkeit erhielt Falk²⁾ in Übereinstimmung mit anderen Beobachtern

$$\delta = 1,2225 \text{ für } \vartheta = 273^\circ \text{ abs., } \frac{d\delta}{d\vartheta} = -0,000986.$$

Damit läßt sich für die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Doppelbrechung des Nitrobenzols folgende Tabelle zusammenstellen, bei welcher ϑ wieder die absolute Temperatur, n und δ die mit Hilfe obiger Zahlangaben berechneten Werte von Brechungsindex und Dichte, P den nach (3) berechneten Ausdruck bedeutet. β ist ein gewisser, von Cotton und Mouton gemessener Winkel (Analysatordrehung), welcher der relativen Verzögerung Ψ in (1) und, da sich die Angaben auf dieselben Werte von l und H beziehen, der Cotton-Moutonschen Konstante C proportional ist;

$$V = \frac{\beta}{P}$$

ist daher der Größe Q in Formel (4) proportional

Tabelle 1.

ϑ	n	δ	P	β	$V \cdot 10^{-3}$
279,4	1,5601	1,2162	0,0549	128,6	2,34
287,1	1,5565	1,2086	0,0529	121,4	2,30
287,9	1,5561	1,2078	0,0527	121,0	2,30
296,3	1,5522	1,1995	0,0507	112,8	2,22
304,3	1,5484	1,1916	0,0489	106,8	2,18
314,7	1,5435	1,1814	0,0467	99,3	2,13
326,9	1,5378	1,1694	0,0443	90,9	2,05

Würde die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie der Wirklichkeit entsprechen, so müßte V für alle Temperaturen denselben Wert besitzen; wie man sieht, nimmt V mit wachsender Temperatur ab, d. h. die Cotton-Moutonsche Konstante sinkt bei zunehmender Temperatur stärker als jene Theorie verlangt.

Bei α -Bromnaphthalin wurden die Messungen von Cotton und Mouton ebenfalls für $\lambda = 578 \mu\mu$ ausgeführt, aber nur bei

den beiden Temperaturen $\vartheta = 284,8^\circ$ abs. und $320,9^\circ$ abs. Für den Brechungsindex erhielten Cotton und Mouton bei $\vartheta = 289^\circ$ abs. den Wert $n = 1,6607$. Der Temperaturkoeffizient des Brechungsindex des α -Bromnaphthalins ist von Nasini und Bernheimer¹⁾ für die Wellenlängen $\lambda = 656, 589$ und $486 \mu\mu$ bestimmt worden; hieraus ergibt sich für $\lambda = 578 \mu\mu$ durch Interpolation

$$\frac{dn}{d\vartheta} = -0,000462.$$

Die Angaben der verschiedenen Beobachter über die Dichte des α -Bromnaphthalins weichen nicht unerheblich voneinander ab; nach Dufet²⁾ ist (bei Beschränkung auf die für uns erforderliche Genauigkeit):

$$\delta = 1,5374 \text{ für } \vartheta = 293^\circ \text{ abs., } \frac{d\delta}{d\vartheta} = -0,00103.$$

Bei Verwendung dieser Werte ergibt sich aus den Cotton-Moutonschen Beobachtungen folgende Tabelle, in welcher die Bezeichnungen dieselbe Bedeutung haben wie in der vorigen:

Tabelle 2.

ϑ	n	δ	P	β	$V \cdot 10^{-3}$
284,8	1,6626	1,5458	0,0741	117,0	1,58
320,9	1,6460	1,5087	0,0633	103,9	1,64

Berücksichtigt man die erwähnte Unsicherheit, die den benutzten Dichtewerten anhaftet, sowie daß die Messung von β bei α -Bromnaphthalin mit geringerer Sorgfalt ausgeführt wurde als bei Nitrobenzol, so kann man hier, in Übereinstimmung mit der Theorie, V als merklich konstant bezeichnen.

Natürlich wird durch zwei so ganz vereinzelte Messungsreihen noch nicht entschieden, ob die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie in ihrer ursprünglichen Form zur

1) R. Nasini u. O. Bernheimer, Gazzetta chim. ital. 15. S. 59. 1885.

2) P. Dufet, Recherches expérimentales sur la variation des indices de réfraction sous l'influence de la chaleur. Thèses. Paris 1885; Bull. soc. minéral de France 8. S. 284. 1885.

Erklärung der magnetischen Doppelbrechung ebenso unzureichend bleibt, wie sie es für den elektrooptischen Kerreffekt jedenfalls ist.

Um diese Frage zu beantworten, habe ich daher an einer Anzahl von Flüssigkeiten Beobachtungen über die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Doppelbrechung angestellt, über die ich im folgenden berichte.

II. Versuchsanordnung.

§ 4. *Optischer Teil der Versuchsanordnung.* Das Prinzip der gesamten Versuchsanordnung ergibt sich aus der nebenstehenden schematischen Fig. 1.

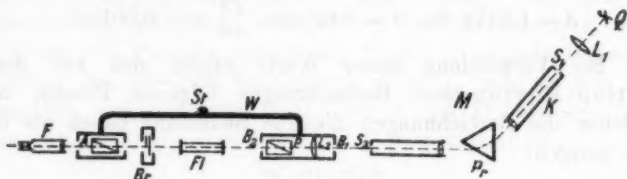


Fig. 1.

Die von der Lichtquelle Q ausgehende weiße Strahlung wurde mittels des Linsensystems L_1 auf den Eintrittsspalt S_1 des Monochromators M vereinigt. Der Austrittsspalt S_2 des Monochromators, aus dem dann nahezu monochromatisches Licht des gewünschten Spektralbezirks austrat, befand sich in der Brennebene der Linse L_2 . Durch diese wurde die Strahlung somit parallel gemacht, durchsetzte dann das polarisierende Nicol P , hierauf die zwischen den (in Fig. 1 nicht eingezeichneten) Polshuhen des Elektromagneten befindliche Flüssigkeitssäule FI , alsdann den zur Messung der kleinen Doppelbrechungen dienenden Braceschen Halbschattenkompensator Br und endlich das analysierende Nicol A , um schließlich in das Beobachtungsfernrohr F einzutreten.

Bezüglich der Einzelheiten der optischen Teile der Versuchsanordnung ist folgendes zu bemerken:

Als *Lichtquelle* Q diente eine Kohlenbogenlampe, die in einem Astbestkasten bei etwa 25 Ampere brannte. Das

Linsensystem L_1 bestand aus einem Kondensor, dessen Messingfassung mit dem Asbestkasten fest verbunden war, sowie aus zwei kleineren bikonvexen Objektiven. Letztere konnten durch Handregulierung horizontal und vertikal verschoben werden; es war damit leicht möglich, auch wenn der Lichtbogen etwas gewandert war, ein scharfes Bild des Bogenlichtkraters auf den Monochromatorspalt S_1 zu entwerfen. Um die Wirkung der Wärmestrahlung herabzudrücken, wurde zwischen Linsensystem L_1 und Monochromator ein parallelepipedischer Flüssigkeitstrog aus Spiegelglasplatten von 5 cm Tiefe gestellt, der mit 1%iger Kupfersulfatlösung gefüllt war (in Fig. 1 weggelassen).

Der Monochromator M , ein von der Firma Fr. Schmidt und Haensch in Berlin stammendes Instrument, besaß ein feststehendes Prisma in Minimalstellung. Die Einstellung auf den gewünschten Spektralbezirk erfolgte durch mikrometrische Bewegung des Eintrittsspaltkollimators K ; zur Ablesung der Einstellung diente eine, von einer kleinen Glühlampe beleuchtete, mit Nonius versehene Skala, deren Eichung auf Wellenlängen mit Hilfe einer Quecksilbercadmiumlampe ausgeführt wurde. Die beiden Bilateralspalte S_1 und S_2 erhielten solche Weiten, daß der ausgeschnittene Spektralbezirk eine Breite von etwa 15μ besaß; das vom Austrittsspalt S_2 kommende Strahlenbündel hatte dann noch eine für die Messungen hinreichende Intensität.

Bei den folgenden Messungen kam stets derselbe schmale Spektralbezirk zur Verwendung, dessen Mittelpunkt bei $\lambda = 589 \mu$ lag. Polarisator P und Analysator A waren Glansche Nicols, deren Fassungen durch den Doppelwinkel W (aus Messing) fest miteinander verbunden waren; dieser saß verstellbar an einem vertikalen Stativ St . Die Entfernung des Polarisators vom Analysator betrug etwa 45 cm; jedes der beiden Nicol besaß eine Öffnung von 8×8 mm. Der Polarisator war innerhalb seiner Fassung mittels eines kleinen Hebels drehbar; er wurde so eingestellt, daß seine Schwingungsrichtung mit der Kraftlinienrichtung des (weiter unten zu besprechenden) Magnetfeldes einen Winkel von ungefähr 45° bildete. Die Polarisatorfassung enthielt außerdem die achromatische Linse L_2 , in deren Brennebene sich der Austrittsspalt S_2 des Monochromators befand, und trug an den

Enden die beiden kreisrunden Blenden B_1 und B_2 , welche das hindurchgehende Strahlenbündel in geeigneter Weise begrenzten (vgl. § 5). Das Analysator Nicol war innerhalb seiner Fassung ebenfalls drehbar und befand sich stets in einer gegen den Polarisator gekreuzten Lage; die Grobeinstellung erfolgte mittels eines Hebels, die Feineinstellung in der üblichen Weise, nach Anziehen einer Klemme, mit Hilfe einer Mikrometerschraube.

Der *Bracesche Halbschattenkompensator* Br war ein ebenfalls von der Firma Schmidt und Haensch hergestelltes Instrument mit variabler Empfindlichkeit; seine Beschreibung habe ich kürzlich an anderer Stelle veröffentlicht¹⁾, auf die ich bezüglich der weiter unten benutzten Formeln, sowie aller Einzelheiten verweisen möchte. Der Kompensator war an einem besonderen vertikalen Stativ befestigt, das mit dem Doppelwinkel W in keiner Verbindung stand. Die für die Orientierung in den Strahlengang erforderliche Vertikalbewegung konnte mittels eines Zahntriebes bewerkstelligt werden. Zur Justierung dienten die Fußschrauben des Stativs, sowie eine Mikrometerschraube, die eine Drehung um die Stativachse ermöglichte.

Dem das halbe Gesichtsfeld bedeckenden *Halbschattenglasstreifen* wurde eine solche Pressung erteilt, daß seine relative Verzögerung für $\lambda = 589 \mu\mu$ in den meisten Fällen etwa $3 \cdot 10^{-3} \lambda$ betrug; er war so orientiert, daß seine Schwingungsrichtung unter 45° gegen die Schwingungsrichtungen der gekreuzten Nicols geneigt war.

Die *Kompensatorplatte* bestand aus zwei genau gekreuzten Glimmerblättchen, die zusammen eine hinreichend kleine Verzögerung ergaben; es gelangten zwei derartige Kompensatorplatten zur Verwendung, deren Herstellung die optische Anstalt Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. besorgt hatte. Ihre Eichung erfolgte mit Hilfe einer parallel zur optischen Achse geschnittenen Quarzplatte, deren relative Verzögerung $\bar{\varphi}$ mittels eines Babinet-Soleilschen Kompensators mit Halbschatteneinstellung²⁾ bestimmt wurde und für $\lambda = 589 \mu\mu$ den Wert

1) G. Szivessy, Zeitschr. f. Phys. 6. S. 311. 1921.

2) G. Szivessy, Verh. d. D. phys. Ges. 21. S. 271. 1919.

$$\bar{\varphi} = 0,230 \lambda$$

besaß.

Ist α das (auf die Schwingungsrichtung des Analysators als Nullage bezogene) Azimut der Kompensatorplatte bei der Halbschattenstellung (d. h. bei der Stellung, für welche beide Gesichtsfeldhälften gleich dunkel sind), und bedeutet $\bar{\alpha}$ das entsprechende Azimut für die zur Eichung dienende Quarzplatte¹⁾, so folgt für die Verzögerung φ der Kompensatorplatte

$$\sin \varphi = \sin \bar{\varphi} \frac{\sin 2 \bar{\alpha}}{\sin 2 \alpha}.$$

Für die Verzögerungen φ der beiden Kompensatorplatten ergaben sich bei $\lambda = 589 \mu\mu$ die in der Tabelle zusammengestellten Werte.

Tabelle 3.

Nr. der Kompensatorplatte	2α	$2 \bar{\alpha}$	φ
I	21° 39'	1° 05'	0,0081 λ
II	8° 22'	1° 17'	0,0244 λ

Die Messung der magnetischen Doppelbrechung erfolgte nun in folgender Weise: Nachdem die Halbschattenplatte durch Pressung eine geeignete Verzögerung τ erhalten hatte, wurde das Halbschattenazimut α der Kompensatorplatte ermittelt, bevor die im Troge *Fl* (vgl. § 5) befindliche Flüssigkeit doppelbrechend gemacht wurde, d. h. bevor das Magnetfeld eingeschaltet war. Hierauf wurde letzteres erregt, und das neue Halbschattenazimut α' der Kompensatorplatte (bei unverändert gebliebenem τ) gemessen. Bedeutet β den Winkel, den die Kraftlinienrichtung des Magnetfeldes mit der Schwingungsrichtung des Analysators bildet, so ist die in Wellenlängen ausgedrückte relative Verzögerung Ψ zwischen außerordentlicher und ordentlicher Welle gegeben durch die Beziehung

$$\Psi = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{\sin 2 \beta} (\sin 2 \alpha' - \sin 2 \alpha).$$

β wurde, wie schon oben erwähnt, nahezu gleich 45° ge-

1) Über die Messung der Halbschattenazimute vgl. G. Szivessy, Zeitschr. f. Phys. 6. S. 311. § 2. 1921.

wählt, aber nicht genau bestimmt; da also bloß φ , α und α' bekannt waren, so ergab sich aus den Beobachtungen nur die Größe

$$(5) \quad \Phi = \Psi \sin 2\beta = \frac{1}{2\pi} \sin \varphi (\sin 2\alpha' - \sin 2\alpha).$$

β behielt bei sämtlichen Messungen seinen Wert bei; ebenso wurde die Länge l der durchstrahlten Flüssigkeitsschicht, sowie die Stärke H des Magnetfeldes bei allen Messungen, die miteinander verglichen werden sollten, konstant gehalten. Die ermittelten Werte Φ waren daher nach der Gleichung (1) den entsprechenden Cotton-Moutonschen Konstanten C proportional. Da für diese Untersuchung aber nur relative Werte in Frage kamen, so genügte in allen Fällen die Feststellung von Φ .

Der Bracesche Kompensator war so angebracht, daß die Halbschattenplatte zwischen Kompensatorplatte und Analysator zu liegen kam. Die Beobachtung der Trennungslinie der Halbschattenplatte erfolgte mittels des kleinen, mit dem Analysator fest verbundenen astronomischen Fernrohrs F , dessen Okularteil für die Scharfeinstellung mit einer Schneckenführung versehen war.

§ 5. *Magnetfeld und Flüssigkeitstrog.* Das Magnetfeld wurde durch einen großen Hartmann und Braunschen Halbringelevtromagneten erzeugt, der so aufgestellt war, daß seine Kraftlinien vertikal verliefen. Die zylindrischen Polschuhe hatten einen Durchmesser von 8 cm, der Abstand ihrer horizontalen Endflächen, der bei allen Messungen gleich blieb, betrug 0,8 cm. Als Stromquelle diente eine Batterie von 40 Akkumulatoren. Die Stromstärke konnte mittels eines Ruhstratregulierwiderstandes vom Beobachtungsplatze aus stetig verändert werden und wurde an einem Präzisionsamperemeter festgestellt, dessen Spiegelglasskala $\frac{1}{5}$ Ampere abzulesen und $\frac{1}{10}$ Ampere zu schätzen gestattete; sie betrug bei allen Messungen $19 (\pm 0,1)$ Amp. Die mit einer Hartmann und Braunschen Wismutspirale gemessene Feldstärke ergab sich dann bei dem angegebenen Polabstande zu etwa 10000 Gauss. Genaue Kenntnis derselben war nicht erforderlich, da nur Vergleichsmessungen ausgeführt wurden; wesentlich war nur, daß sie während einer Messungsreihe denselben Wert beibehielt, was

durch Konstanthalten des Speisestroms erzielt wurde. Da sich während einer längeren Beobachtungsdauer die Wickelungen des Elektromagneten erwärmten und infolgedessen die Stromstärke etwas abnahm, so mußte diese durch Verringerung des Vorschaltwiderstandes auf ihren ursprünglichen Wert gebracht werden. Kleine Stromschwankungen hatten übrigens keine merklichen Änderungen der Intensität des Magnetfeldes zur Folge, da sich dieses bei 19 Amp. schon im gesättigten Zustande befand. Um eine Erwärmung der Polschuhe zu vermeiden, war jeder von einer Spirale aus Kupferrohr (von 4 mm äußerem und 2,5 mm lichtem Durchmesser) umgeben (Fig. 3, k);

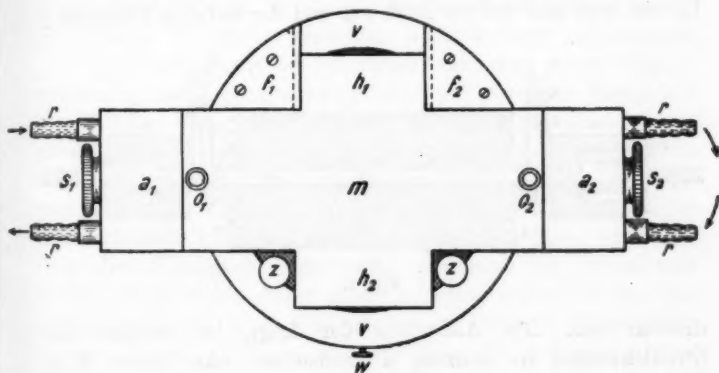


Fig. 2.

die beiden Spiralen (von je 5 Windungen) wurden durch eine Schlauchverbindung hintereinandergeschaltet, an die Wasserleitung angeschlossen und während der Ausführung der Beobachtungen dauernd durchspült.

Der *Flüssigkeitsrog* (Fig. 2, 3) war am unteren Polschuh *p* angebracht. Er bestand aus einer Messingplatte *m* von 11 cm Länge, 4,3 cm Breite und 0,7 cm Höhe, die drei parallele Ausbohrungen von kreisförmigem Querschnitt enthielt; die mittlere Ausbohrung *d* von 0,5 cm Durchmesser diente zur Aufnahme der zu untersuchenden Flüssigkeit, die beiden anderen seitlichen (von je 0,4 cm Durchmesser) wurden von der Temperierungsflüssigkeit (Wasser) durchspült (vgl. § 6).

An den Enden der Messingplatte waren zwei rechtwinklige prismatische Messingstücke a_1 und a_2 von $2,5 \times 2,5$ cm Seitenfläche angelötet, durch welche sich die drei erwähnten Ausbohrungen fortsetzten; sie enthielten außerdem Gewinde für die Schraubenverschlüsse s_1 und s_2 . Die Ansatzrohre r bildeten die Fortsetzungen der beiden für die Temperierungsflüssigkeit dienenden seitlichen Ausbohrungen der Messingplatte. Diese besaß ferner zwei Ansatzstücke h_1, h_2 von je 4,2 cm Länge und 1,7 cm Breite. Das eine derselben (h_1) ließ sich mittels Schwalbenschwanzführung zwischen die 0,8 cm hohen Führungsleisten f_1, f_2 einschieben; letztere war auf dem Messingring v aufgeschraubt, dessen rechteckiger Querschnitt 1,1 cm breit und 0,5 cm hoch war und der auf dem Polschuh p

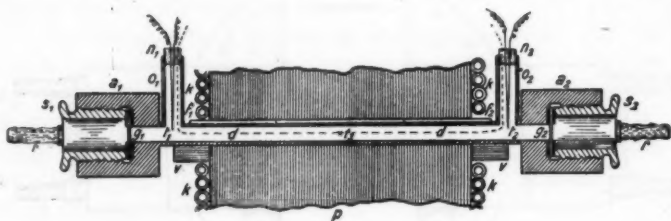


Fig. 3.

drehbar saß. Das Aufsuchen der Lage, bei welcher das Strahlenbündel die Bohrung d durchsetzte, ohne deren Wandung zu streifen, erfolgte durch Handregulierung mit Hilfe des Ansatzes h_2 ; zur Fixierung dieser Stellung diente die Klemmschraube w .

Wie aus den obigen Maßangaben ersichtlich, hatte die Messingplatte m eine 0,1 cm geringere Höhe als die Führungsleisten f_1, f_2 ; hierdurch wurde verhindert, daß beim Erregen des Magnetfeldes die (sich dann etwas nähernden) Polschuhe die Platte festklemmten. Zu diesem Zwecke wurden außerdem zwei kleine, 0,8 cm hohe Messingzylinder z zwischen die Polschuhe, in die den Führungsleisten gegenüberliegenden Ecken, eingeschoben.

Die Länge der ganzen Flüssigkeitssäule betrug 12,8 cm; zu ihrem Abschlusse dienten die beiden Spiegelglasplättchen g_1 und g_2 von 0,1 cm Stärke und 1,5 cm Durchmesser, die

zwecks Abdichtung zwischen dünnen Korkringscheiben lagen und von den Schraubenverschlüssen s_1, s_2 festgehalten wurden. Sie durften keine Doppelbrechung aufweisen, mußten also spannungsfrei sein. Die Prüfung auf Spannungsfreiheit erfolgte in der Weise, daß das Halbschattenazimut α der empfindlicheren Kompensatorplatte (Kompensatorplatte Nr. I) aufgesucht wurde, bevor sich der Trog zwischen den Polschuhen befand; dann wurde dieser, nach Einsetzen des zu prüfenden Verschußplättchens g_1 oder g_2 , zwischen die Führungsleisten f_1, f_2 eingeschoben. Die Halbschattenstellung des Braceschen Kompensators mußte dann ungeändert bleiben, d. h. keine der beiden Gesichtsfeldhälften durfte eine Intensitätsänderung aufweisen. Unter einer größeren Anzahl von Verschußglasplättchen fanden sich einige, die den gewünschten Anforderungen entsprachen.

Die Verwendung der Schraubenverschlüsse erwies sich als notwendig, weil ein spannungsfreies Aufkitten der Verschußglasplättchen bei den benutzten höheren Temperaturen ausgeschlossen war. Andererseits konnten die Schraubenverschlüsse nicht zwischen den Polschuhen angebracht werden, da sonst aus technischen Gründen der optisch nutzbare Querschnitt der Flüssigkeitssäule zu eng geworden wäre; dies hatte zur Folge, daß die Flüssigkeitssäule nicht zwischen den Polschuhen endete, ihre Enden daher zum Teil ganz außerhalb des Magnetfeldes lagen, zum Teil einem schwächeren Magnetfelde ausgesetzt waren, als ihr mittlerer Teil. Da aber nur relative Messungen ausgeführt wurden, so bedingte dieser Umstand keine weiteren Nachteile; wesentlich war nur, daß bei allen zu vergleichenden Messungen die Lage der Flüssigkeitssäule relativ zum Magnetfelde umgeändert blieb, was stets der Fall war.

Zum Einfüllen der zu untersuchenden Flüssigkeit dienten die beiden Ansatzrohre aus Messing O_1 und O_2 von 2 cm Länge, 0,05 cm Wandstärke und 0,5 cm lichtigem Durchmesser. Es wurde stets so viel Flüssigkeit eingefüllt, daß das Niveau sich innerhalb der Ansatzrohre O_1, O_2 befand; die Flüssigkeit konnte sich so bei der Erwärmung ungehindert ausdehnen, ohne daß bei der darauffolgenden Abkühlung Luftblasen eintraten.

Vor dem Einfüllen der Flüssigkeit wurde die Ausbohrung d sorgfältig gereinigt und dann ihre Wandung mittels einer Benzollampe schwach berußt, um Reflexe des hindurch-

gehenden Strahlenbündels zu vermeiden; demselben Zwecke dienten die an der Polarisatorfassung angebrachten kreisrunden Blenden B_1 und B_2 (Fig. 1), durch welche das Strahlenbündel hinreichend eingengt wurde.

§ 6. *Herstellung konstanter Temperaturen und ihre Messung.* Die Herstellung konstanter Temperaturen der zu untersuchenden Flüssigkeiten, soweit sie oberhalb der „Zimmertemperatur“ lagen, erfolgte mit Hilfe von erwärmtem Wasser, welches mit einer der gewünschten Temperatur entsprechenden Strömungsgeschwindigkeit die beiden seitlichen Ausbohrungen der Messingplatte m (Fig. 2) durchfloß, deren Fortsetzungen die Ansatzrohre r bildeten. Die Richtung der Strömung war zuweilen die in Fig. 2 durch Pfeile angedeutete, manchmal auch die entgegengesetzte.

Um das strömende Wasser auf die erforderliche Temperatur zu bringen, wurde die Vorrichtung benutzt, die man auch bei dem Pulfrichschen Refraktometer zur Erzielung höherer Temperaturen verwendet.¹⁾ Das aus der Wasserleitung kommende Wasser lief zuerst durch einen Wasserdrukregulator, durch welchen die in der Wasserleitung vorhandenen Druckschwankungen beseitigt wurden, hierauf durch eine aus einem etwa 3 m langen Kupferrohr bestehende Temperierungsspirale und durchströmte dann die seitlichen Ausbohrungen der Messingplatte. Die Temperierungsspirale befand sich zwischen zwei ineinander gesteckten Rohren, deren inneres einen Kupferboden besaß; dieser wurde durch eine oder mehrere Bunsenflammen erwärmt. Die Geschwindigkeit des Wasserstromes wurde, je nach der zu erzielenden Temperatur, durch einen Quetschhahn reguliert.

Bei Beobachtungen, die etwa bei Zimmertemperatur angestellt wurden, kam das Wasserleitungswasser ohne Vorwärmung zur Benutzung. Temperaturen unterhalb der Zimmertemperatur wurden erzielt, indem die Temperierungsspirale in ein großes, mit Eiswasser gefülltes Gefäß gebracht wurde; bei Messungen, deren Ausführung in die Wintermonate fiel, wurde zuweilen auch so verfahren, daß die Beobachtungen im

1) Vgl. die Druckschrift der Firma C. Zeiss, Jena: Beschreibung und Anweisung zum Gebrauch des Refraktometers nach Pulfrich (Neukonstr. 1895). Neudruck 1909.

ungeheizten Raume ausgeführt wurden, nachdem dessen Fenster eine Zeitlang offen gestanden hatten.

Die Messung der Temperatur der zu untersuchenden Flüssigkeit erfolgte mit Hilfe zweier Kupferkonstantanthermoelemente (Fig. 3, t_1 , t_2). Die Zuleitungen zu der einen Lötstelle eines jeden dieser beiden Thermoelemente gingen durch die Korke n_1 , n_2 , welche den Verschluß der Ansatzrohre O_1 , O_2 bildeten. Die andere Lötstelle, die für beide Thermoelemente gemeinsam war, und durch einen Umschalter bedarfsweise in den Kreis von t_1 bzw. von t_2 geschaltet werden konnte, befand sich in einem Ölbad, dessen Temperatur an einem $1/10^\circ$ Quecksilberthermometer abgelesen wurde. Die Temperatur des Ölbad folgte den Schwankungen der Zimmertemperatur nur sehr langsam und blieb während der Dauer einer Temperaturmessungsreihe konstant.

Die Messung der thermoelektrischen Potentialdifferenz geschah durch Kompensation, die hierbei benutzte Schaltung folgt aus Fig. 4. In dieser bedeutet t die zur Messung der Flüssigkeitstemperatur dienende, t_0 die im Ölbad befindliche Lötstelle. G war ein als Galvanoskop dienendes Hart-

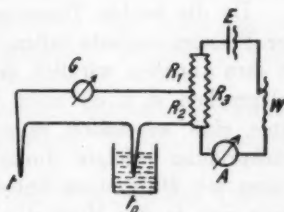


Fig. 4.

mann und Braunsch'sches Drehspulspiegelgalvanometer, A ein Präzisionsmilliamperemeter mit Spiegelglasskala, die $1/6$ Milliampere abzulesen gestattete, E ein Akkumulator; R_1 , R_2 , R_3 waren Präzisionsstöpselrheostaten, W ein regulierbarer Vorschaltwiderstand. R_3 war stets gleich 1 Ohm; im Falle der Kompensation ergab sich daher die thermoelektrische Potentialdifferenz e zu

$$e = J \frac{R_2}{1 + R_1 + R_2},$$

falls J die am Milliamperemeter A abgelesene Stromstärke bedeutet. Versteht man unter ϑ die Temperatur der Lötstelle t , unter ϑ_0 die Temperatur der Lötstelle t_0 , so ist

$$\vartheta - \vartheta_0 = k e.$$

Der Reduktionsfaktor k jedes Thermoelements wurde bestimmt, indem die Lötstelle t in die Dämpfe siedender Flüssig-

keiten (Schwefelkohlenstoff, Methylalkohol, Wasser) gebracht wurde, deren Temperaturen an einem $\frac{1}{10}^{\circ}$ Quecksilberthermometer abgelesen wurden.

Um Temperaturschwankungen zu vermeiden und alle Teile der Flüssigkeitssäule auf dieselbe Temperatur zu bringen, mußte die Temperierungsflüssigkeit die Apparatur längere Zeit durchströmen; Temperaturen von 40°C und höher erforderten zuweilen eine Vorwärmungszeit von einigen Stunden. Es war aber bei geeigneter Regulierung der Strömungsgeschwindigkeit und hinreichender Geduld stets möglich, einen stationären Zustand zu erreichen, bei dem die Angaben der beiden Thermoelemente t_1 und t_2 auch bei höheren Temperaturen merklich konstant blieben und während der Dauer einer Messungsreihe (etwa $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ Stunde) um nicht mehr als $\frac{1}{3}^{\circ}$ voneinander abwichen.

Da die beiden Thermoelemente in der Nähe der Enden der Flüssigkeitssäule saßen, so mußte noch festgestellt werden, ob ihre Angaben wirklich der mittleren Flüssigkeitstemperatur entsprachen, d. h. ob nicht der mittlere Teil der Flüssigkeitssäule eine wesentlich verschiedene Temperatur besaß. Die Nachprüfung erfolgte durch mehrere besondere Vorversuchsreihen mit Hilfe eines dritten Thermoelements t_3 , dessen Lötstelle sich in der Mitte der Flüssigkeitssäule befand (in Fig. 3 gestrichelt gezeichnet) und das natürlich nachher bei Ausführung der optischen Messungen entfernt wurde. Nun lagen die Enden der Flüssigkeitssäule ziemlich tief innerhalb der Messingplatte, und dies hatte zur Folge, daß in der Tat eine gleichmäßige Temperierung aller Teile der Flüssigkeitssäule erzielt werden konnte.

Als Beispiel führe ich die beiden folgenden Messungsreihen an, bei welchen ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ_3 die von den betreffenden Thermoelementen festgestellten Temperaturen der Flüssigkeit bedeuten, die in einem Falle (Tab. 4) Wasser, im anderen Falle (Tab. 5) Nitrobenzol war. Beide Beobachtungsreihen erstreckten sich über die Dauer von etwa einer halben Stunde, die Einzelmessungen jeder Reihe hatten einen zeitlichen Abstand von etwa 5—6 Minuten.

Der Eintritt gleicher Temperatur in allen Teilen der Flüssigkeitssäule machte sich auch dadurch kenntlich, daß die

Tabelle 4.

(Wasser.)

Mittlere Temperatur: 291,2° abs.

ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3
291,2	291,1	291,2
291,3	291,1	291,1
291,1	291,0	291,2
291,2	291,0	291,3
291,2	291,2	291,2
291,0	291,3	291,1

Mittel: 291,2

291,1

291,2

Tabelle 5.

(Nitrobenzol.)

Mittlere Temperatur: 316,2° abs.

ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3
316,4	316,2	316,1
316,1	316,3	316,0
316,0	316,5	316,2
316,2	316,2	316,3
316,4	316,0	316,2
316,2	316,0	316,4

Mittel: 316,2

316,2

316,2

sonst auftretenden Schlierenbildungen und hiervon hervorgerufenen lästigen Störungen des Kompensatorgesichtsfeldes gänzlich verschwunden waren.

§ 7. Gang einer Messung; Bestimmung von Brechungsindex und Dichte. Der Gang einer Messung der magnetischen Doppelbrechung war durch die aufeinander folgende Ausführung folgender Schritte gekennzeichnet:

1. Füllung des Flüssigkeitstrogas mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und Orientierung in den Strahlengang (§ 5).

2. Inangangsetzung der Kühlung der Polschuhe des Elektromagneten, sowie der Temperierungsvorrichtung für den Flüssigkeitstrog.

3. Nach Erzielung konstanter Temperatur (§ 6) Zündung der Bogenlampe und Messung des Azimuts α der Halbschatteneinstellung des Braceschen Kompensators vor Erregung des Magnetfeldes (§ 4).

4. Feststellung der von den Thermoelementen t_1 und t_2 angezeigten Temperaturen; diese durften untereinander im Mittel höchstens um $\frac{1}{3}^\circ$ abweichen (§ 6).

5. Erregung des Magnetfeldes und Messung des dadurch geänderten Azimuts α' der Halbschatteneinstellung (§ 4).

6. Ausschaltung des Magnetfeldes und erneute Messung der Flüssigkeitstemperatur; diese durfte von der unter 4. ermittelten mittleren Temperatur nicht abweichen.

7. Zur Kontrolle nochmalige Messung des Azimuts α der Halbschatteneinstellung, welches mit dem unter 3. gemessenen übereinstimmen mußte.

Die Prüfung der Formel (4) erfordert auch noch die Kenntnis des *Brechungsindex und der Dichte der Flüssigkeit als Funktion der Temperatur*.

Zur Messung der Brechungsindizes n der Flüssigkeiten und ihrer Temperaturkoeffizienten $\frac{dn}{d\vartheta}$ diente ein von C. Zeiss-Jena geliefertes Pulfrichsches Refraktometer (Neukonstruktion¹⁾); als Lichtquelle diente eine Natriumflamme, die verschiedenen Temperaturen wurden durch einen konstant temperierten Wasserstrom erzeugt und mittels eines Quecksilberthermometers festgestellt, das $\frac{1}{5}^{\circ}$ abzulesen gestattete. Der Brechungsindex jeder Flüssigkeit wurde für vier Temperaturen ϑ ermittelt, die in dem für die Messung der magnetischen Doppelbrechung in Frage kommenden Temperaturintervall lagen; aus den so ermittelten Wertepaaren ϑ, n wurde der Temperaturkoeffizient $\frac{dn}{d\vartheta}$ durch Interpolation berechnet.

Die Messung der Dichten δ der Flüssigkeiten erfolgte in der üblichen Weise mittels Pyknometers; zur Erzielung der Temperaturen, die höher lagen als die Zimmertemperatur, diente ein Wasserbad, dessen Temperatur durch einen Quecksilberthermostaten konstant gehalten wurde. Die Bestimmung des Temperaturkoeffizienten $\frac{d\delta}{d\vartheta}$ wurde in ganz entsprechender Weise durchgeführt, wie die eben erwähnte Ermittlung des Temperaturkoeffizienten für den Brechungsindex.

III. Ergebnisse.

§ 8. *Allgemeines über die Messungsergebnisse.* In den folgenden Paragraphen sind die an den einzelnen untersuchten Flüssigkeiten erhaltenen Messungsergebnisse mitgeteilt.

Bezüglich der in den Tabellen enthaltenen Angaben ist allgemein folgendes zu bemerken:

ϑ bedeutet die mittlere absolute Flüssigkeitstemperatur. Es ist

$$\vartheta = \frac{\vartheta' + \vartheta''}{2},$$

wobei unter ϑ' die vor Messung der Doppelbrechung ermittelte mittlere Flüssigkeitstemperatur zu verstehen ist, und

1) C. Pulfrich, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 15. S. 389. 1895.

ϑ'' die entsprechende Temperatur nach Ausführung der Messung bedeutet (§ 7). ϑ' (und ebenso ϑ'') wurde als Mittel aus den Temperaturangaben der beiden Thermoelemente erhalten, indem die elektromotorische Kraft jedes Thermoelements 6—7 mal kompensiert und hieraus das Mittel gebildet wurde. Die mittleren Angaben der beiden Thermoelemente wichen, wie schon bemerkt, um weniger als $\frac{1}{3}^{\circ}$ voneinander ab, dasselbe gilt von ϑ' und ϑ'' .

n ist der Brechungsindex für die Wellenlänge $\lambda = 589 \mu\mu$, auf die sich, wie schon bemerkt, alle Messungen beziehen; da die Temperaturen, bei welchen die Bestimmung der Brechungsindizes erfolgte, im allgemeinen nicht mit den Temperaturen zusammenfielen, bei denen die Messung der Doppelbrechung ausgeführt wurde, so wurden die in den Tabellen angegebenen Werte der Brechungsindizes aus dem Temperaturkoeffizienten $\frac{dn}{d\vartheta}$ (§ 7) und dem in der Vorbemerkung zu den Tabellen angegebenen Wertepaar ϑ , n bezeichnet.

δ bedeutet die Dichte; ihre Berechnung aus den experimentell ermittelten Werten geschah in entsprechender Weise, wie eben für den Brechungsindex angegeben.

P ist nach der Formel (3) aus ϑ , n und δ berechnet.

α ist das Azimut der Halbschatteneinstellung des Brace'schen Kompensators, bevor die Flüssigkeit durch Erregen des Magnetfeldes doppelbrechend gemacht wurde; die angegebenen Werte von α sind das Mittel aus 6—7 Einzelablesungen.

α' bedeutet das Azimut der Halbschatteneinstellung nach Erregung des Magnetfeldes; es ist ebenfalls das Mittel aus 6—7 Einzelablesungen.

Φ ist der nach Formel (5) aus α , α' und φ berechnete Ausdruck, welcher der relativen Verzögerung ψ in (1) proportional ist. Bei jeder Tabelle ist angegeben, welche Kompensatorplatte zur Verwendung kam; der entsprechende Wert von φ ergibt sich aus Tabelle 3. Der mittlere Fehler des Mittels von Φ , berechnet aus 6—7 Einzelmessungen, lag bei Benutzung der Kompensatorplatte I nicht oberhalb 0,7%; bei Benutzung der Kompensatorplatte II war er, infolge der schärferen Einstellungsmöglichkeit, etwas kleiner.

Q' bedeutet das Verhältnis Φ/P . Da nach (1) und (5)

$$\Phi = l H^2 \sin 2\beta \cdot C$$

ist und die Größen l , H , β konstant gehalten wurden, so ist Q' dem Verhältnis $Q = C/P$ proportional.

Δ bedeutet den Ausdruck

$$\frac{Q' - Q_{293}'}{Q_{293}'},$$

wo Q_{293}' der durch Interpolation ermittelte, der Temperatur $\vartheta = 293^\circ$ abs. entsprechende Wert von Q' ist.

Nach der Theorie müßte (vgl. § 2) Q und somit auch Q' von der Temperatur unabhängig sein; Δ müßte daher, falls die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie der Wirklichkeit entspricht, für sämtliche Temperaturen verschwinden.

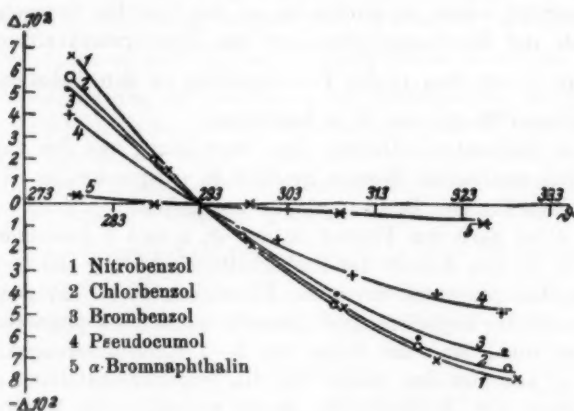


Fig. 5.

In Fig. 5 ist für die einzelnen untersuchten Flüssigkeiten Δ als Funktion der Temperatur eingetragen.

§ 9. *Nitrobenzol*. Das Nitrobenzol war von Kahlbaum als chemisch bezogen worden und wurde ohne weitere Reinigung untersucht.

Für den Brechungsindex erhielt ich:

$$n = 1,5523 \text{ für } \vartheta = 293,6^\circ \text{ abs.; } \frac{dn}{d\vartheta} = -0,00047,$$

für die Dichte:

$$\delta = 1,2020 \text{ für } \vartheta = 293,0^\circ \text{ abs.; } \frac{d\delta}{d\vartheta} = -0,00095.$$

Diese Werte unterscheiden sich nur unerheblich von den entsprechenden, von Falk¹⁾ angegebenen.

Tabelle 6.

Nitrobenzol.

(Kompensatorplatte II; $Q_{293}' = 3,28 \cdot 10^{-2}$.)

ϑ	n	δ	P	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$	$Q' \cdot 10^3$	$\Delta \cdot 10^3$	$V \cdot 10^{-3}$	$\frac{V}{Q'} \cdot 10^{-3}$
278,4	1,5594	1,2159	0,0550	8° 34'	13° 11'	1,92	3,50	6,7	2,35	67,1
289,2	1,5544	1,2056	0,0523	8 32	12 42,5	1,74	3,33	1,5	2,28	68,5
298,9	1,5498	1,1964	0,0500	8 30	12 22	1,61	3,22	- 1,8	2,20	68,3
309,4	1,5449	1,1864	0,0478	8 12	11 47	1,50	3,18	- 4,6	2,15	68,7
320,1	1,5398	1,1763	0,0456	8 29	11 49	1,39	3,05	- 7,0	2,09	68,5
329,3	1,5355	1,1675	0,0438	8 04	11 14	1,32	3,02	- 7,9	2,05	67,9

Q' nimmt, wie man sieht, mit zunehmender Temperatur ab; bei Nitrobenzol fällt also die Cotton-Moutonsche Konstante mit zunehmender Temperatur stärker ab, als die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie verlangt. Dies steht qualitativ im Einklang mit den in § 3 besprochenen Cotton-Moutonschen Beobachtungen. Die Temperaturabhängigkeit von Δ ist aus Fig. 5, Kurve 1, ersichtlich.

Will man die erwähnten Cotton-Moutonschen Beobachtungen zum quantitativen Vergleich heranziehen, so ist allerdings zu beachten, daß diese bei der Wellenlänge $\lambda = 578 \mu\mu$ ausgeführt wurden, während ich die Wellenlänge $\lambda = 589 \mu\mu$ benutzt habe. Doch liegen diese beiden Wellenlängen und die ihnen entsprechenden Brechungsindizes nicht weit voneinander ab, und es sind daher in der vorletzten Spalte der Tab. 6 die sich aus den Cotton-Moutonschen Messungen ergebenden, aus Tab. 1 durch Interpolation ermittelten Werte von V angegeben. Das Verhältnis V/Q' , das in der letzten Spalte eingetragen ist, müßte konstant sein; die Abweichungen liegen zwar zum Teil etwas außerhalb der Beobachtungsfehler, doch kann man, in Anbetracht der Schwierigkeit der Messung dieser kleinen Doppelbrechungen bei höheren Temperaturen, die quantitative Übereinstimmung zwischen meinen Beob-

1) K. G. Falk, Journ. Amer. Chem. Soc. 31. S. 809. 1909.

achtungen und jenen Cottons und Moutons als hinreichend befriedigend bezeichnen.

§ 10. *Chlorbenzol*. Das Chlorbenzol war von F. Merck als chemisch rein geliefert worden und kam ohne weitere Reinigung zur Verwendung.

Für den Brechungsindex ergab sich in naher Übereinstimmung mit den Beobachtungen von Perkin¹⁾:

$$n = 1,5250 \text{ für } \vartheta = 292,8^{\circ} \text{ abs.; } \frac{dn}{d\vartheta} = -0,00055.$$

Die Dichte und ihr Temperaturkoeffizient wurden bestimmt zu:

$$\delta = 1,1079 \text{ für } \vartheta = 291,5^{\circ} \text{ abs.; } \frac{d\delta}{d\vartheta} = -0,00107,$$

was von den Angaben Youngs²⁾ und Birons³⁾ nur unerheblich abweicht.

Tabelle 7.

Chlorbenzol.

(Kompensatorplatte I; $Q_{293} = 10,30 \cdot 10^{-3}$.)

ϑ	n	δ	P	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^4$	$Q \cdot 10^3$	$A \cdot 10^2$
278,2	1,5330	1,1221	0,0498	21° 18'	25° 29'	5,42	10,89	5,7
287,9	1,5277	1,1117	0,0475	21 20,5	25 11,5	4,99	10,51	2,0
297,9	1,5222	1,1011	0,0453	21 25	24 57,5	4,60	10,16	- 1,4
308,2	1,5165	1,0900	0,0431	21 28	24 44	4,24	9,84	- 4,5
317,9	1,5112	1,0797	0,0412	21 31,5	24 35	3,97	9,64	- 6,4
328,1	1,5056	1,0687	0,0394	21 34	24 27,5	3,76	9,54	- 7,4

Wie bei Nitrobenzol, so nimmt auch bei Chlorbenzol die Cotton-Moutonsche Konstante mit zunehmender Temperatur stärker ab, als die Langevinsche molekulare Orientierungstheorie verlangt; die Temperaturabhängigkeit von A wird durch Fig. 5, Kurve 2, dargestellt.

§ 11. *Brombenzol*. Das Brombenzol war ebenfalls von Merck als chemisch rein bezogen worden und kam ohne besondere Reinigung zur Untersuchung.

Der Brechungsindex und seine Temperaturabhängigkeit wurden zu

$$n = 1,5649 \text{ für } \vartheta = 283,2^{\circ} \text{ abs.; } \frac{dn}{d\vartheta} = -0,00053$$

1) W. H. Perkin, Journ. chem. soc. 61. S. 298. 1892.

2) S. Young, Scint. Proc. R. Dublin Soc. (N. S.) 12. S. 374. 1910.

3) E. Biron, Journ. de la soc. phys.-chim. russe 42. S. 147. 1910.

bestimmt; diese Werte weichen von den von Perkin¹⁾ angegebenen nur wenig ab.

Für die Dichte ergab sich, in befriedigender Übereinstimmung mit den Angaben von Young²⁾ und Biron³⁾:

$$\delta = 1,4948 \text{ für } \vartheta = 294,5^\circ \text{ abs.}; \frac{d\delta}{d\vartheta} = -0,00133.$$

Tabella 8.

Brombenzol.

(Kompensatorplatte I; $Q_{393}' = 6,69 \cdot 10^{-3}$.)

ϑ	n	δ	P	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^4$	$Q' \cdot 10^3$	$\Delta \cdot 10^2$
277,7	1,5678	1,5171	0,0692	21° 22'	25° 7,5'	4,88	7,04	5,2
288,1	1,5623	1,5033	0,0659	21 30	24 57,5	4,49	6,81	1,8
297,5	1,5574	1,4911	0,0631	21 30	24 43	4,18	6,62	- 1,0
308,5	1,5515	1,4762	0,0599	22 14	25 12,5	3,85	6,42	- 4,0
317,9	1,5465	1,4687	0,0574	22 34	25 22	3,61	6,29	- 6,0
327,7	1,5413	1,4506	0,0550	22 47	25 27	3,44	6,25	- 6,6

Brombenzol zeigt also ganz ähnliches Verhalten wie Chlorbenzol und Nitrobenzol; der Temperaturverlauf von Δ wird durch Fig. 5, Kurve 3, veranschaulicht.

§ 12. *Pseudocumol*. Das zur Untersuchung gelangte Pseudocumol war von Merck als „technisch“ (Siedepunkt 160 bis 170° C.) geliefert worden; eine besondere Reinigung erfolgte nicht.

Für den Brechungsindex wurde gefunden:

$$n = 1,5124 \text{ für } \vartheta = 291,0^\circ \text{ abs.}; \frac{dn}{d\vartheta} = -0,00053.$$

Für die Dichte ergab sich:

$$\delta = 0,8994 \text{ für } \vartheta = 294,0^\circ \text{ abs.}; \frac{d\delta}{d\vartheta} = -0,00083.$$

Tabelle 9.

Pseudocumol.

(Kompensatorplatte I; $Q_{393}' = 1,26 \cdot 10^{-2}$.)

ϑ	n	δ	P	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^4$	$Q' \cdot 10^3$	$\Delta \cdot 10^2$
278,1	1,5192	0,9126	0,0401	21° 15'	25° 18'	5,25	1,31	4,0
293,0	1,5113	0,9002	0,0373	21 17	24 54,5	4,71	1,26	0,0
301,8	1,5067	0,8929	0,0358	21 21,5	24 46,5	4,44	1,24	- 1,6
310,4	1,5021	0,8858	0,0344	21 25	24 39	4,20	1,22	- 3,2
319,9	1,4971	0,8779	0,0330	21 29	24 33	4,00	1,21	- 4,0
327,5	1,4931	0,8716	0,0319	21 33	24 30	3,83	1,20	- 4,8

1) W. H. Perkin, a.a.O. 2) S. Young, a.a.O. 3) E. Biron, a.a.O.

Pseudocumol verhielt sich wie die bisher besprochenen Flüssigkeiten; die Abweichungen zwischen Beobachtungen und Theorie sind hier allerdings etwas geringer, wie die durch Fig. 5, Kurve 4, dargestellte Temperaturabhängigkeit von Δ zeigt.

§ 13. *α -Bromnaphthalin.* Das untersuchte α -Bromnaphthalin stammte von Kahlbaum; es war als chemisch rein geliefert worden und wurde keiner besonderen Reinigung unterworfen.

Die Angaben für den Brechungsindex und die Dichte des α -Bromnaphthalins weichen bei den einzelnen Autoren nicht unerheblich voneinander ab.¹⁾ Ich erhielt

für den Brechungsindex:

$$n = 1,6600 \text{ für } \vartheta = 292,0^\circ \text{ abs.; } \frac{dn}{d\vartheta} = -0,00046;$$

für die Dichte:

$$\delta = 1,4977 \text{ für } \vartheta = 292,0^\circ \text{ abs.; } \frac{d\delta}{d\vartheta} = -0,00099.$$

Tabelle 10.

α -Bromnaphthalin.

(Kompensatorplatte II; $Q_{292} = 2,40 \cdot 10^{-2}$)

ϑ	n	δ	P	2α	$2\alpha'$	$\Phi \cdot 10^3$	$Q' \cdot 10^3$	$\Delta \cdot 10^2$
278,7	1,6661	1,5109	0,0742	8° 22,5'	12° 40'	1,79	2,41	+ 0,4
287,8	1,6619	1,5019	0,0712	8 25	12 31	1,71	2,40	0,0
298,7	1,6569	1,4911	0,0678	8 31	12 25	1,63	2,40	0,0
308,9	1,6522	1,4810	0,0649	8 34	12 17	1,55	2,39	- 0,4
319,1	1,6475	1,4709	0,0622	8 37,5	12 11	1,48	2,39	- 0,4
325,4	1,6446	1,4646	0,0606	8 42	12 9,5	1,44	2,38	- 0,8

Bei α -Bromnaphthalin sind die Abweichungen zwischen den beobachteten Werten und den nach der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie berechneten sehr klein; der Gang der Abweichungen ist zwar derselbe wie bei den übrigen Flüssigkeiten, doch liegen die Unterschiede zum Teil hart an der Grenze der Beobachtungsfehler, wie sich auch aus der durch Fig. 5, Kurve 5, veranschaulichten Temperaturabhängigkeit von Δ erkennen läßt.

¹⁾ Vgl. z. B. die Zusammenstellung bei P. Dufet, Recueil de Données numériques. Optique 1. S. 109. 1898.

Dieses für α -Bromnaphthalin gewonnene Ergebnis ist in Übereinstimmung mit den (in § 3 besprochenen) Beobachtungen, die Cotton und Mouton an dieser Flüssigkeit angestellt haben.

§ 14. *Zusammenfassung.* Es wurde der Temperaturkoeffizient der magnetischen Doppelbrechung bei fünf verschiedenen Flüssigkeiten (Nitrobenzol, Chlorbenzol, Brombenzol, Pseudocumol und α -Bromnaphthalin) gemessen. Die aus der Langevinschen molekularen Orientierungstheorie für eine bestimmte Wellenlänge gefolgerte Beziehung

$$C = \text{konst.} \frac{\delta (n^2 + 2)^2}{n \vartheta}$$

(C Cotton-Moutonsche Konstante, δ Dichte, n Brechungsindex, ϑ absolute Temperatur der Flüssigkeit) wurde von den Beobachtungen nicht bestätigt.

Die Cotton-Moutonsche Konstante nimmt vielmehr bei abnehmender Temperatur stärker zu, als jene Theorie verlangt. Am größten waren die Abweichungen bei Nitrobenzol, am geringsten bei α -Bromnaphthalin.

Münster i. Westf., Physikalisches Institut der Universität,
März 1922.

(Eingegangen 24. März 1922.)

5. Über den ZnSCu-Phosphor; von B. Gudden und R. Pohl.

Unter der großen Anzahl der von Lenard untersuchten Phosphore nimmt der aus ZnS durch Cu-Zusatz hergestellte ZnSCu-Phosphor mit der grünen α -Emissionsbande eine bemerkenswerte Sonderstellung ein: Er zeigt eine Tilgung, die die an anderen Phosphoren beobachtete um eine Größenordnung übertrifft. D. h. man gewinnt nur einen winzigen Bruchteil der aufgespeicherten Lichtsumme zurück, wenn man die Abklingung des erregten Phosphors durch Bestrahlung mit geeignetem (z. B. rotem) Licht beschleunigt.¹⁾

Neben dieser Sonderstellung der starken Tilgung zeigt der ZnSCu α -Phosphor noch eine andere Erscheinung, die sich bisher bei keinem weiteren Phosphor hat nachweisen lassen: Er zeigt bei Bestrahlung mit erregendem Lichte eine erhebliche Zunahme seiner Dielektrizitätskonstante.²⁾

Da diese Erhöhung an die nur in einer Konzentration von ca. 0,01 Proz. vorhandenen Cu-Atome gebunden ist, so handelt es sich dabei nicht um eine Polarisierung sämtlicher Moleküle, sondern um verhältnismäßig große Verschiebungswege innerhalb der wenigen, die Cu-Atome enthaltenden „Zentren“. Nähere Angaben über die Größe der Zentren und die Beweglichkeit der Elektronen in ihnen haben sich aus Beobachtungen über die Abnahme dieses Effektes mit wachsender Frequenz des zur Messung benutzten Wechselfeldes ergeben.³⁾ Die Zentrengröße findet sich in befriedigender Über-

1) P. Lenard, Ber. Heidelb. Akad. 5. Abb. 1917.

2) B. Gudden u. R. Pohl, Zeitschr. f. Phys. 1. S. 365. 1920.

3) W. Molthan, Zeitschr. f. Phys. 4. S. 262. 1921.

einstimmung mit Lenards auf ganz anderen Wegen gewonnenen Werten.¹⁾

Um den Zusammenhang zwischen der im Lichte beobachteten Zunahme der Dielektrizitätskonstanten und dem Mechanismus der Phosphoreszenz weiter zu verfolgen, hat Herr Wilde inzwischen Messungen²⁾ über die Temperaturabhängigkeit des Effektes angestellt. Das Ergebnis ist kurz folgendes:

1. Der Effekt zeigt bei einer Temperatur von ca. 140° ein Maximum.

2. Ummeßbar wird der Effekt bei hohen Temperaturen erst im Gebiete des oberen Momentanzustands ($> 230^{\circ}$)³⁾, bei tiefen Temperaturen noch mitten im Gebiet des Dauerleuchtens.

3. Das zeitliche An- und Abklingen des Effektes geht bei allen Temperaturen und Wellenlängen dem der Helligkeit des Phosphors parallel.

Aus dem gesamten Tatsachenmaterial möchten wir jetzt folgendes schließen:

Die Größe der Dielektrizitätskonstantenzunahme im Licht wird durch den jeweilig durch das Licht erzeugten Bestand an *erregten* Zentren bestimmt. Der Effekt muß demnach bei Erwärmung des Phosphors abnehmen, weil

1. wir bei steigender Temperatur infolge der kürzer werdenden Lebensdauer der Zentren immer weiter hinter der Vollerregung zurückbleiben,

2. nach Lenard⁴⁾ bei steigender Temperatur die Zahl der Zentren abnimmt.

Umgekehrt müßte der Effekt mit sinkender Temperatur steigen und einen Grenzwert annehmen. Im Widerspruch dazu

1) Als Maß der Beweglichkeit der Elektronen im Innern der Zentren ergeben sich Leitfähigkeiten, die um einige Zehnerpotenzen höher sind als diejenigen, die man allen Phosphoren durch ihre ganze Masse hindurch im Lichte erteilen kann.

2) Sie werden als Auszug aus einer Dissertation in der Zeitschr. f. Phys. veröffentlicht werden.

3) P. Lenard u. V. Klass, Ann. d. Phys. 15. S. 688. § 176. 1904. R. Tomatschek, Ann. d. Phys. IV. 65. 1921 findet für seine ZnSCu -Präparate 210° .

4) P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 641. § 50. 1910.

beobachten wir das Maximum bei etwa 140° . Der Widerspruch löst sich durch die Annahme einer mit sinkender Temperatur abnehmenden Verschieblichkeit der Elektronen im Innern der Zentren.

Die Richtigkeit dieser Annahme läßt sich experimentell beweisen: Steigert man die Frequenz des zur Messung benutzten Wechselfeldes, so wird der Effekt um so stärker heruntergesetzt, je niedriger die Temperatur des Phosphors ist. Das von Herrn Wilde beobachtete Maximum bei 140° erklärt sich demnach durch die Überlagerung des Temperatureinflusses auf den Bestand an erregten Zentren einerseits, die Verschieblichkeit in ihnen andererseits.

Die hier aus dem Maximum erschlossene und dann auch experimentell bestätigte Abnahme der Elektronenverschieblichkeit in den Zentren mit sinkender Temperatur legt es nahe, einen Gedanken wieder aufzunehmen, den Lenard 1918 ausgesprochen hat, ohne ihn mangels experimenteller Grundlagen weiter zu verfolgen.¹⁾ Lenard hat damals versucht, die Tilgung der Phosphore mit einer Verschieblichkeit im Innern der Zentren in Beziehung zu bringen. Die Tilgung sinkt mit abnehmender Temperatur, und in der Tat finden wir nun durch den Dielektrizitätskonstanteneffekt eine Elektronenverschieblichkeit innerhalb der erregten Zentren, die ebenfalls mit der Temperatur heruntergeht.

Daß der Dielektrizitätskonstanteneffekt bisher an anderen Phosphoren noch nicht gefunden ist, halten wir einstweilen nur für eine Frage der Meßgenauigkeit. Denn in unserer Anordnung entzieht sich dieser Effekt der Meßbarkeit schon bei einer Temperatur von -100° , bei der die Tilgung des ZnSCu α -Phosphors die größten sonst beobachteten Tilgungen noch erheblich übertrifft. Erst bei -250° fand Lenard bei ZnSCu α die normale Erscheinung der Ausleuchtung wie bei anderen Phosphoren.²⁾

Göttingen, Physik. Inst. d. Univ., März 1922.

1) P. Lenard, Ber. Heidelb. Akad. Nr. 8. S. 79. 1918.

2) Ebenda S. 18.

(Eingegangen 18. April 1922.)

6. Zur Berechnung und Beurteilung des Schroteffektes

(Bemerkungen zu der Notiz von Herrn J. B. Johnson);
von W. Schottky.

Herr Johnson war so freundlich, mir seine kürzlich (Ann. d. Phys. **67**. S. 154—156. 1922) veröffentlichte „Bemerkung zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt“ im Manuskript zuzusenden. Es handelt sich dabei im wesentlichen um die Berichtigung eines Rechenfehlers, der mir in meiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand (Ann. d. Phys. **57**. 541—567. 1918) unterlaufen war. Da diese Korrektur, für die ich Herrn Johnson sehr dankbar bin, sowohl für meine früheren theoretischen Schlußfolgerungen wie für die aus Herrn Hartmanns experimentellen Untersuchungen gezogenen Schlüsse von fundamentaler Bedeutung ist, möchte ich hier in einigen daran anknüpfenden Bemerkungen zu der veränderten Sachlage Stellung nehmen.

Zunächst noch ein paar Worte zu der mathematischen Seite des Problems. Die Berechnung des Integrals

$$(I) \quad S_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}$$

durch Partialbruchzerlegung, wie sie Herr Johnson angibt, und wie sie auch meiner eigenen Rechnung zugrunde lag, ist offenbar nicht ganz leicht zu übersehen, und es werden nur die wenigsten Leser Zeit finden können, sich von der Richtigkeit des Resultats zu überzeugen. Es wird daher vielleicht nicht überflüssig sein, wenn ich noch eine andere ganz einfache Berechnungsweise dieses Integrals hierher setze, die mir mein Vater, F. Schottky, freundlichst mitteilte, ohne daß wir übrigens untersuchen konnten, ob es sich dabei um ein Novum, oder nicht vielmehr um eine den Spezialisten geläufige Umformung handelt.

Die Berechnung beruht darauf, daß man das Integral (I) mit einem anderen Integral

$$(II) \quad S_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}$$

kombiniert, welches aus (I) hervorgeht, indem man $z = 1/x$ als neue Variable einführt, das Integral (I) durch z ausdrückt, wobei wieder von 0 bis ∞ integriert werden muß, und schließlich für z wieder den Buchstaben x setzt. Das bestimmte Integral (I) ist also gleich dem bestimmten Integral (II), und die Summe beider Integrale hat den doppelten Wert jedes einzelnen Integrals. Es ist also auch

$$S_1 = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 1) dx}{(1-x^2)^2 + r^2 x^2}.$$

Hier läßt sich aber der Integrand durch weitere Umformung als Differential einer bekannten Funktion darstellen. Setzt man

$$x - \frac{1}{x} = ry, \quad \text{so wird} \quad \frac{x^3 + 1}{x^3} = r dy,$$

und der Nenner

$$= x^2 \left[\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + r^2 \right] = r^2 x^2 (y^2 + 1),$$

also schließlich der Integrand gleich:

$$\frac{1}{r} \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{1}{r} \cdot d(\arctan y).$$

Dabei ist über t von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren, da $x - 1/x$ für $x = 0$ den Wert $-\infty$ und für $x = \infty$ den Wert $+\infty$ annimmt. Es wird also schließlich:

$$S_1 = \frac{1}{2r} [\arctan \infty - \arctan (-\infty)] = \frac{1}{2r} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2r}.$$

Damit ist die Berechnung Herrn Johnsons auf einem etwas einfacheren Wege bestätigt; statt $2\pi/r^2$ ist in unseren Rechnungen der Ausdruck $\pi/2r$ einzusetzen, d. h. es sind alle mit dem Integral (I) proportionalen Resultate mit $r/4$ zu multiplizieren.

Bei Durchsicht der Rechnung und Vergleich mit dem nach einer anderen Methode erhaltenen Ergebnis (vgl. die Bemerkung am Schluß) hat sich jedoch noch eine zweite Korrektur ergeben, bei der es sich um einen Zahlenfaktor 2 handelt.

Bei der Darstellung des Schwankungsstromes i durch eine Fouriersche Reihe (a. a. O. S. 555, 556) ist die Darstellung benutzt:

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k),$$

wobei

$$C_k = \frac{2}{T} \int_0^T j \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) dt.$$

Hier ist T die große Zeit, die die Grundperiode der Fourierreihe bestimmt; $j = i - i_0$ ist die Wechselstromkomponente des Schwankungsstromes. (Die zweite Gleichung würde für das konstante Glied der Entwicklung ($k = 0$) nicht gelten, doch interessieren die konstanten Glieder, die sich auf die Gleichstromkomponente von i beziehen, bei unserer Aufgabe nicht, da der Effekt immer unter Zwischenschaltung von Transformatoren oder Kapazitäten gemessen wird, die zwar bis zu genügend tiefen Frequenzen „bildgetreu“ übertragen, jedoch die Gleichstromkomponente völlig annullieren.)

Mit dieser Einschränkung sind jedoch die beiden hingeschriebenen Gleichungen vollkommen richtig, wie man durch Einsetzen der zweiten in die erste und unter Benutzung geläufiger Beziehungen leicht beweisen kann. Andererseits ist unzweifelhaft ebenso richtig die Darstellung

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t) + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin(\omega_k t),$$

wobei

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T j \cdot \cos(\omega_k t) dt,$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T j \cdot \sin(\omega_k t) dt.$$

Nun tritt folgendes Dilemma auf. C_k^2 ist, wie sich durch Vergleich dieser Darstellungen ergibt, $= A_k^2 + B_k^2$.

Statt

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} C_k^2$$

zu berechnen (Gl. 7, S. 557) kann man also auch

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} A_k^2 + \sum_{k=k_1}^{k_2} B_k^2$$

berechnen. Wendet man nun genau dieselben Überlegungen, die auf der Zusammensetzung des Schwankungsstromes aus

unabhängigen Elementarereignissen beruhen, und die früher (a. a. O.) bei der Berechnung von $\sum C_k^2$ benutzt sind, auf die Berechnung von $\sum A_k^2$ und $\sum B_k^2$ einzeln an, so erhält man für jede einzelne dieser Summen denselben Ausdruck (Gl. 12, S. 559) wie für $\sum C_k^2$, also im ganzen jetzt für die aus A_k^2 und B_k^2 zusammengesetzte $\sum C_k^2$ einen doppelt so großen Wert als früher.

Dieser doppelte Wert ist nun nach meiner Ansicht der richtige und zwar aus folgendem Grunde. Bei der Auswertung der (noch richtigen) Gl. (9) (a. a. O., S. 557) wird die Voraussetzung benutzt, daß in dem Ausdruck

$$j \Delta t \cdot j' \Delta t' \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) \cdot \sin(\omega_k t' + \varphi_k')$$

die gestrichenen und ungestrichenen Größen voneinander unabhängig sind für alle Fälle, in denen nicht $t = t'$ und demnach $j = j'$ ist. Das trifft deshalb nicht zu, weil wir in den Größen φ_k noch Parameter vor uns haben, die von dem gesamten zeitlichen Verlauf von j bzw. j' während der ganzen Fourierperiode T abhängen. Es sind also hier die angestellten Unabhängigkeitsbetrachtungen nicht zulässig, wohl aber in dem Fall der getrennten Entwicklung mit den Koeffizienten A_k und B_k , in denen solche abhängigen Parameter nicht mehr auftreten. Demnach wird jetzt (S. 559, unten):

$$\overline{C_k^2} = \frac{4}{T} e i_0 \quad (e \text{ Elementarladung})$$

und ebenso ist die rechte Seite von Gl. (13) (S. 560) mit 2 zu multiplizieren. Daraus folgt dann, daß statt des Johnsonschen Korrektionsfaktors $r/4$, mit dem der früher berechnete Effekt zu multiplizieren wäre, der richtige Wert durch Multiplikation mit $r/2$ zu erhalten ist.

Nun zu den physikalischen Folgerungen. Unter den Voraussetzungen der grundlegenden Betrachtung — Schwingungskreis mit Selbstinduktion L , Widerstand R und Kapazität C in Spannungsschaltung an ein Entladungsrohr angelegt, das den „Schroteffekt“ zeigt¹⁾ — wird nunmehr die durch die Summe

1) A. a. O. S. 555.

der Partialenergien $E_k = \frac{1}{2} L a_k^2$ definierte Gesamtenergie des Schroteffektes

$$(III) \quad \overline{E}_S = \frac{\omega_0}{2r} \cdot L e i_0 = \frac{\omega_0}{2\varrho} \cdot \omega_0 L e i_0$$

(ω_0 Eigenschwingung des Schwingungskreises, $\varrho = \frac{R}{L}$, $r = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{\varrho}{\omega_0}$) statt Gl. (14) auf S. 560 der zitierten Arbeit, welche lautet:

$$(E_S = \frac{\omega_0^2}{\varrho^2} \cdot \omega_0 L e i_0).$$

(Entsprechend sind dort die Gleichungen (14') und (14'') zu berichtigen; in der letzteren Gleichung wäre überdies in der alten Formel τ^3 statt τ^2 im Nenner zu verbessern gewesen.)

Um diese Gleichungen anschaulich zu deuten, war nun früher zunächst versucht worden, den sinusförmigen Strom von der Frequenz ω_0 einzuführen, der, in der Entladungsröhre fließend, im Schwingungskreis das Hin- und Herpendeln einer elektrischen Energie bewirkt hätte, die gleich der durch den Schroteffekt hervorgerufenen Energie \overline{E}_S ist. Ein solcher Strom, von der Effektivamplitude c_0 , würde, wie sich durch Spezialisierung von Gl. (5), S. 555 a. a. O. auf die Frequenz ω_0 ergibt, im Schwingungskreis eine magnetische Scheitelenergie, und damit eine konstante Totalenergie

$$(IV) \quad E_0 = c_0^2 \cdot \frac{L}{r^2} = c_0^2 \cdot \frac{L \omega_0^2}{\varrho^2}$$

hervorrufen. (Es ist hier noch zu bemerken, daß diese Gl. (5) für die *Effektivwerte* der Partialströme C_k , und nicht für ihre *Scheitelwerte*, wie dort angegeben, richtig ist. Dies Versehen beschränkt sich aber auf Gl. (5); die folgende Gleichung (6), a. a. O. setzt die Gl. (5) in der richtigen Form ein.) — Soll nun c_0 so bestimmt werden, daß $E_0 = \overline{E}_S$ wird, so ergibt sich aus (III) und (IV):

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0^2 \frac{\omega_0^2}{\varrho^2} L = \frac{\omega_0^2}{2\varrho} L e i_0, \\ c_0^2 = \frac{\varrho e i_0}{2}, \\ c_0 = \sqrt{\frac{\varrho e i_0}{2}} = \sqrt{\frac{i_0 e R}{2L}}, \end{array} \right.$$

die sich von der Johnsonschen Gleichung (2) nur durch den erwähnten weiteren Korrektionsfaktor 2 unterscheidet.

Nun war für die frühere entsprechende Gleichung:

$$(c_0 = \sqrt{\omega_0 e i_0} = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{e_0 i_0}{\tau}})$$

eine plausible physikalische Deutung gegeben worden, indem festgestellt wurde, daß dieser Strom c_0 , bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi}^1$, gleich der Wurzel aus dem mittleren Schwankungsquadrat der während aufeinander folgender Zeitintervalle τ übergehenden Gesamtströme ist. Die neue und unzweifelhaft richtige Berechnung führt jedoch auf einen anderen Ausdruck; wenn die „Abklingzeit“ des Schwingungskreises

$$\vartheta = \frac{2}{q}$$

eingeführt wird, folgt jetzt:

$$(VI) \quad c_0 = \sqrt{\frac{e i_0}{\vartheta}}.$$

Dieser Ausdruck ist aber jetzt nicht so zu deuten, daß etwa statt des mittleren Stromschwankungsquadrates während der Zeitintervalle τ jetzt das Schwankungsquadrat während der Abklingzeiten ϑ für den auf den Schwingungskreis mit der Eigenschwingung τ wirkenden Schwankungsstrom in Betracht zu ziehen wäre, sondern es ist so (vgl. a. a. O. S. 551), als ob nur der τ/ϑ te Teil des auf die Zeitintervalle τ bezogenen mittleren Stromschwankungsquadrates maßgebend wäre, eine Beziehung, für die ich keine einfache Erklärung sehe. Ich muß gestehen, daß die frühere, einleuchtende Formel mit daran schuld gewesen ist, wenn ich, den scheinbar entgegenstehenden experimentellen Ergebnissen zum Trotz, an der Richtigkeit meiner Rechnung zunächst nicht gezweifelt habe.

Von welchem Einfluß ist nun die an Gleichung (14) anzubringende Korrektur auf die berechnete Größenordnung des Effektes? Wenn es sich um Elektronen oder einwertige Ionen handelt, ist mit $e = \varepsilon = 1,56 \cdot 10^{-19}$ Coulomb nach Gl. (III), falls wir noch

$$\frac{\omega_0}{q} = \frac{\pi \vartheta}{\tau}$$

einsetzen,

1) Hier war damals (S. 561, oben) der Faktor $\sqrt{2}$ weggelassen worden.

$$\overline{E}_S = \frac{\pi}{2} \varepsilon \frac{\vartheta}{\tau} \omega_0 L i_0 = 2,46 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\vartheta}{\tau} \omega_0 L i_0,$$

d. h. $\tau/2\pi\vartheta$ mal so groß als S. 561, unten berechnet. Mit den in der Verstärkertechnik gebräuchlichen Werten $\vartheta/\tau = 3$ bis 30 ergibt das einen rund 20 bis 200 mal kleineren Effekt als früher berechnet; wenn also die Voraussetzungen unserer Rechnung zutreffen — und wir werden aus den korrigierten Resultaten sehen, daß das doch, wenigstens der Größenordnung nach, der Fall ist — so bewegt sich die Schrotenergie \overline{E}_S in den maßgebenden Schwingungskreisen der Verstärkeranordnungen zwischen $5 \cdot 10^{-22}$ und $5 \cdot 10^{-18}$ technischen Energieeinheiten, während früher Größenordnungen bis 10^{-16} Energieeinheiten berechnet wurden. Diese Korrektur ist deshalb besonders wichtig, weil sie zeigt, daß in Verstärkeranordnungen (aber nicht in unserer später zu besprechenden Experimentalanordnung) die Schwingungsenergie des Schroteffektes in *derselben* Größenordnung fällt, wie die Energie der Wärmeschwingungen bei Zimmertemperatur, die nach S. 545 (a. a. O.) $4 \cdot 10^{-21}$ technische Energieeinheiten (Joule) beträgt. Es besteht weiter die Möglichkeit, durch geeignete Wahl der Schwingungskreise die Energie der Schroteffektschwingung unter die der Wärmeschwingung herabzudrücken und so (NB. falls keine anderen Störungen auftreten!), die elektrischen Freiheitsgrade ganzer Schwingungskreise in Verstärkeranordnungen, allein auf Grund ihrer Wärmeenergie bei Zimmertemperatur beispielsweise in einem Telephon „abzuhören“.

Es war dann, um die kleinste in einer Verstärkeranordnung noch meßbare Leistung zu bestimmen, die „Schrotleistung“ L_S berechnet worden, die der Schrotenergie E_S entspricht. Die richtige Rechnung ergibt nunmehr statt Gl. (15), a. a. O. S. 562, die Gleichung:

$$(VII) \quad L_S = \frac{\pi e \omega_0 L i_0}{\tau}.$$

Hier geht nun die Dämpfung des Schwingungskreises nicht mehr ein; die Störung der Verstärkerleistung durch den Schroteffekt und damit die kleinste aufnehmbare Signalenergie ist, im Gegensatz zu der Folgerung 1, S. 562 unten, von der Dämpfung des Eingangskreises *unabhängig*. Dagegen bleibt

die Abhängigkeit von der Eigenfrequenz des Eingangskreises bestehen, allerdings nur in quadratischem Anwachsen, während früher ein Anwachsen mit der 3. Potenz berechnet war.

Setzt man wieder den Wert der Elementarladung e für e ein, so folgt:

$$L_s = 4,92 \cdot 10^{-10} \frac{\omega_0 L i_0}{\tau} \text{ Watt.}$$

Die Grenzen dieser Schrotleistung in den Eingangskreisen der Verstärkeranordnungen¹⁾ sind ca. 10^{-18} und 10^{-14} Watt; die Grenze infolge der Wärmebewegung war ca. 10^{-17} Watt; Signalleistungen bis zu dieser Größenordnung lassen sich also bei im übrigen idealer Anordnung noch verstärken.

Nun zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt. Hier tritt, wenn man unserem gewissermaßen durch die historische Entwicklung gegebenen Gedankengang folgt, eine Schwierigkeit auf. Ich hatte in meiner ersten Arbeit nur den Idealfall behandelt, daß das Entladungsrohr einen unendlich großen inneren Widerstand besitzt, also nicht seinerseits auf die in ihm fließenden Schwankungsströme eine Rückwirkung ausüben kann. Diese Annahme war unter unseren experimentellen Bedingungen, wo wir, um starke Effekte zu bekommen, mit extrem hohen i_0 -Werten arbeiteten, jedoch keineswegs erfüllt, es handelte sich also jetzt um die rechnerische Lösung eines allgemeineren Problems, das noch dadurch verwickelter wurde, daß der zur Messung der Spannungsschwankungen am Schwingungskreis dienende Verstärker in seinem Eingangskreis ebenfalls nicht einen praktisch unendlich hohen Widerstand besaß; außerdem war im Entladungsstromkreis des Rohres und am Verstärker noch eine Kapazität zu berücksichtigen. Herr Hartmann ist nun so vorgegangen, daß er den „Schwankungsstrom“, der den Schwingungskreis von der Eigenschwingung τ anregt, ein für allemal durch den oben berechneten sinusförmigen Strom c_0 ersetzte und eine dazu

1) Wie in meiner zweiten Notiz (Ann. d. Phys. 20. S. 79—81. 1921) hervorgehoben, kommt bei Röhren, die unterhalb der Ionisierungsspannung der Restgase arbeiten, statt des Eingangskreises der Schwingungskreis hinter der ersten Anode in Frage.

gehörige „elektromotorische Kraft der Schwankung“ aus dem inneren Widerstand des Rohres bestimmte, worauf alle weiteren Rechnungen nach bekanntem Verfahren durchgeführt werden konnten. Diese Methode, deren Berechtigung durch genauere Überlegungen gestützt wird, gründet sich aber doch darauf, daß außer der Eigenschwingung τ des Schwingungskreises, die die Periode dieses Ersatzstromes c_0 bestimmt, keine weiteren Konstanten der verschiedenen Stromkreise in den Wert von c_0 eingehen; und wenn jetzt, nach Gl. (VI) der „Ersatzstrom“ c_0 von der Abklingzeit ϑ des Schwingungskreises abhängig ist (statt, wie früher, nur von der Periode τ), so läßt sich nicht ohne weiteres übersehen, ob und wie in dieser Abklingzeit der endliche Rohr widerstand und der parallel gelegte Widerstand der Verstärkermeßanordnung zu berücksichtigen ist. Sicher würde man durch sorgfältige Überlegungen auch auf diesem unserem bisherigen Wege zu dem weiter unten anzugebenden, sehr einfachen Resultat kommen; zweckmäßiger ist es jedoch wohl jetzt, schon bei der Berechnung der Partialenergien (a. a. O. S. 555) den verallgemeinerten Stromkreis einzuführen.

Die nachstehende Fig. 1 stellt schematisch die Verallgemeinerung des dort behandelten Schwingungskreises (a. a. O. Fig. 6, S. 554) dar, die der Versuchsanordnung von Herrn Hartmann¹⁾, Fig. 8, zugrunde liegt. L, R sind wieder Selbstinduktion und Widerstand (einschließlich Verlustwiderstand) der verwen-

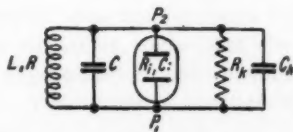


Fig. 1.

deten Spule, C ist die Kapazität des Schwingungskreises, R_i ist der Ohmsche Widerstand des Glühkathodenentladungsrohres, C_i seine (nach den Untersuchungen Herrn Hartmanns durch Wärmeträgheitseffekte der Elektronenemission mitbedingte)

1) C. A. Hartmann, Ann. d. Phys. 65. S. 65. 1921.

scheinbare Kapazität, R_k und C_k ¹⁾ endlich der Ohmsche Widerstand und die Kapazität des Eingangskreises der benutzten Verstärkeranordnung, die ja mit einer WC -Kopplung im Eingangskreise benutzt wurde.

Es handelt sich nun zunächst wieder um die Aufgabe, die Anregung des Schwingungskreises L, R, C durch einen der sinusförmigen Partialströme beliebiger Frequenz zu untersuchen, in die wir, gemäß unserer Fourierzerlegung, den Wechselstrombestandteil des korpuskularen Entladungsstromes aufgeteilt haben. Der frühere Ansatz (S. 555) ging davon aus, daß die Momentanspannungen in beiden Zweigen des Schwingungskreises L, R, C gleich sein müssen.

Unter den neuen, verallgemeinerten Verhältnissen gehen wir besser von einer *Strombilanz* aus. Bezeichnen wir den Momentanwert des Partialschwankungsstromes wieder mit i , so können wir für die beiden Elektroden der Rohre, die Punkte P_1 und P_2 , die Bilanz aufstellen, daß dieser Schwankungsstrom gleich sein muß der Summe der nach außen abfließenden Ströme, vermindert um den „Rückwirkungsstrom“, der infolge der Spannungsschwankungen zwischen P_1 und P_2 in der Röhre selbst auftritt. Durch geeignete Festlegung der Stromrichtungen — indem wir alle Ströme in Richtung von P_1 nach P_2 positiv rechnen — wird der Schwankungsstrom entgegengesetzt gleich der *Summe aller* unter der Wirkung der Spannungsschwankungen zwischen P_1 und P_2 in den verschiedenen Zweigen fließenden Ströme, einschließlich des Rückwirkungsstromes. Man kann also, wie man sofort sieht, die ganze Anordnung Fig. 1 als einen einheitlichen Schwingungskreis mit verschiedenen, parallel geschalteten Kapazitäten C, C_i und C_k , einem Serienwiderstand R und den Parallelwiderständen R_i und R_k auffassen, der von außen an den Punkten P_1 und P_2 (oder an anderen, mit diesen kurzgeschlossenen Punkten) durch einen konstanten äußeren Wechselstrom zu erzwungenen Schwingungen beliebiger Frequenz angeregt wird.

1) Diese, von Herrn Hartmann benutzte Bezeichnung ist nicht mit dem partiellen Schwankungsstrom C_k meiner ersten Arbeit zu verwechseln!

Bezeichnen wir den durch L und R fließenden Strom mit J , während wir für die in allen anderen Zweigen fließenden Momentanströme gleich ihre Abhängigkeit von dem Potentialunterschied $V_{P_1} - V_{P_2} = \Phi$ einführen, so erhalten wir folgende Bilanz:

$$-i = J + \frac{\Phi}{R_i} + \frac{\Phi}{R_k} - \frac{d\Phi}{dt}(C + C_i + C_k),$$

wobei das letzte Glied, nach bekannten Formeln, den zur Aufladung der Kapazitäten nötigen Strom darstellt.

Setzt man hier noch

$$C + C_i + C_k = C_1, \quad \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_k} = \frac{1}{P}$$

(so daß also P der Kombinationswiderstand von Rohr und Verstärker ist), so vereinfacht sich (VII) zu:

$$(VII) \quad J + \frac{\Phi}{P} - C_1 \frac{d\Phi}{dt} = -i.$$

Jetzt erst führen wir die Gleichung

$$\Phi = -L \frac{dJ}{dt} + RJ$$

und die differenzierte Gleichung

$$\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{d^2 J}{dt^2} + R \frac{dJ}{dt}$$

in (VII) ein und erhalten:

$$J \left(1 + \frac{R}{P}\right) - \left(C_1 R + \frac{L}{P}\right) \frac{dJ}{dt} + C_1 L \frac{d^2 J}{dt^2} = -i$$

oder

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \frac{1 + \frac{R}{P}}{C_1 L} J - \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{C_1 P}\right) \frac{dJ}{dt} = -\frac{i}{C_1 L}.$$

Das ist, bis auf das negative Vorzeichen von i (das durch die einheitliche Festsetzung der Stromrichtung gegenüber der früheren andersartigen Definition bedingt ist), die der zweiten Gleichung S. 555 entsprechende Gleichung, die die Form einer reinen Schwingungsgleichung hat. Diese Gleichung vereinfacht sich noch weiter, wenn wir schon jetzt den Bruch R/P , der bei der Meßanordnung etwa den Wert 10^{-5} hat, gegen 1 vernachlässigen. Bezeichnen wir dann, entsprechend wie früher,

den Ausdruck $1/C_1 L$ mit ω_1^2 (Eigenschwingung des Kreises unter Berücksichtigung der Zusatzkapazitäten) und den Ausdruck

$$\frac{R}{L} + \frac{1}{C_1 L} \quad \text{mit } \varrho_1$$

(Dämpfungskonstante unter Berücksichtigung der äußeren Nebenschlußwiderstände), so erhalten wir formal ganz dieselbe Gleichung wie früher:

$$\frac{d^2 J}{dt^2} + \omega_1^2 J - \varrho_1 \frac{dJ}{dt} = -\omega_1^2 i,$$

so daß die weitere Rechnung genau in derselben Form verläuft, und nur statt der Größe r ebenfalls die Größe

$$(VIII) \quad r_1 = \frac{\varrho_1}{\omega_1} = \frac{R}{\omega_1 L} + \frac{1}{\omega_1 C P}$$

auftritt.

Die mittlere Schrotenergie des Schwingungskreises $\overline{E_s} = \sum E_k$ wird also schließlich, entsprechend Gl. (III):

$$(IX) \quad \overline{E_s} = \frac{\omega_1}{2r_1} \cdot \omega_1 L e i_0.$$

Von hier gelangt man nun sehr leicht zu der der Hartmannschen Formel (10) (S. 69) entsprechenden Formel, die den Zusammenhang zwischen der elektrischen Elementarladung und dem Effektivwert der Spannungsschwankung V' von der Frequenz ω_1 an dem Ende des Entladungsröhres darstellt.

Nimmt man nämlich, wie das bei schwachgedämpften Schwingungen zulässig ist, an, daß der Verlauf der elektrischen und magnetischen Vorgänge im Schwingungskreis mit hinreichender Annäherung als rein sinusförmig (und zwar hier von der Periode ω_1) betrachtet werden kann, so besteht zwischen dem Scheitelwert der magnetischen Energie in der Selbstinduktion L , aus dem wir die Energie $\overline{E_s}$ berechnet hatten, und der Effektivspannung V' an den Enden der Selbstinduktionsspule die Beziehung:

$$(X) \quad \overline{E_s} = V'^2 \cdot \frac{L}{\omega_1^2 L^2 + R^2},$$

die man leicht verifiziert, indem man sowohl $\overline{E_s}$ wie V' durch den in der Spule fließenden Wechselstrom (der ebenfalls

periodisch von der Frequenz ω_1 angenommen werden kann) ausgedrückt.¹⁾

1, Zur Erläuterung der Beziehung (X) zwischen der berechneten Gesamtenergie E_g des Schroteffektes und dem Quadrat der gemessenen Spannungsschwankung sind noch einige Bemerkungen nötig, da hier ein Widerspruch vorhanden zu sein scheint. Es scheint zunächst, als ob bei dem Abhören mit dem Telephon und Vergleich der Intensität mit der eines reinen Tones nicht die Gesamtenergie, die wir berechneten, gemessen würde, sondern nur eine Partialenergie, eben die, die der reinen Schwingung entspricht. Aber selbst, wenn man davon absieht und annimmt, daß wirklich Mittelwerte der Spannungsschwankungen (etwa durch ein Hitzdrahtinstrument) gemessen würden, so ist nicht ohne weiteres einzusehen, wie dieser Mittelwert mit dem der partiellen Stromenergien in der Spule, $E_k = \sum \frac{1}{2} L a_k^2$ zusammenhängen soll, die ja für die Frequenz ω_k und die ihr entsprechende Partialspannung V_k' den Wert haben:

$$E_k = V_k'^2 \cdot \frac{L}{\omega_k^2 L^2 + R^2}.$$

Denn wenn außer der Spannungsschwankung selbst noch etwas anderes als die im Endapparat (hinter dem Verstärker) gemessene mittlere Energie in Frage kommt, so ist es nicht eine Eigenschaft der Schwingungsspule (L und R), sondern höchstens die (frequenzabhängige) Impedanz und Verstärkung der Verstärkerschaltung, sowie die Frequenzabhängigkeit der Eigenschaften des Meßapparates.

Das ist in der Tat richtig, macht aber für das Resultat verschwindend wenig aus. Denn wenn man wirklich den Mittelwert von $V_k'^2$ bildet, so findet man, daß bis auf Faktoren, die sich auf die Eigenschwingung ω_1 beziehen, zwar jetzt statt des Integrals S_1 das Integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{(x^2 + r^2) dx}{(1 - x^2)^2 + r^2 x^2}$$

auftritt. Das ist aber wegen der am Anfang hervorgehobenen Gleichheit der Integrale (S_1) und (S_2) einfach gleich $(1 + r^2) \cdot \pi/2r$.

Solange nun $r = R/\omega_0 L$ (wir brauchen hier den idealisierten und den verallgemeinerten Fall nicht auseinanderzuhalten) klein gegen 1 ist, wie wir immer angenommen haben, ist dieses Integral einfach wieder $= \pi/2r$ zu setzen, die Berechnung von $\sum V_k'^2$ führt also zu keinem anderen Wert wie die von $\sum E_k$. Mit noch größerem Recht kann man aber dann die noch viel geringere Frequenzabhängigkeit der Verstärkerimpedanz und Verstärkung in dem in Frage kommenden Gebiet vernachlässigen. Und was schließlich die harmonische Auslese einer reinen Frequenz durch das Ohr betrifft, so kommt es hier offenbar nur darauf an, daß das Ohr nicht schärfer „auswählt“ als der Schwingungskreis selbst, was bei den von uns benutzten schwachen Dämpfungen wohl gewährleistet ist.

Aus (IX) und (X) folgt:

$$\begin{aligned} V'^2 \cdot \frac{L}{\omega_1^2 L^2 + R^2} &= \frac{\omega_1}{2r_1} \cdot \omega_1 L e i_0 \quad \text{oder} \\ \text{(XI)} \quad V'^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{\omega_1 L}\right)^2} &= \frac{\omega_1^2 L^2}{2r_1^2} \cdot \omega_1 r_1 \cdot e i_0 \cdot 1) \end{aligned}$$

Hier ist $R/\omega_1 L$ von der Größenordnung $1/100$ (Hartmann, S. 63, Tab. 6), d. h. $(R/\omega_1 L)^2$ ist von der Größenordnung 10^{-4} , also neben 1 vollständig zu vernachlässigen. Wir erhalten also statt (XI):

$$\text{(XI')} \quad V'^2 = \frac{\omega_1^2 L^2}{2r_1^2} \cdot \omega_1 r_1 e i_0.$$

Hier gehen wir nun auf die Definitionsgleichung (VII) für r_1 zurück. Es ist

$$r_1 = \frac{R}{\omega_1 L} + \frac{1}{\omega_1 C_1 P} = \omega_1 L \left(\frac{R}{\omega_1^2 L} + \frac{1}{P} \right),$$

da $\omega_1^2 L C_1$, das im zweiten Nenner auftritt, definitionsgemäß = 1 ist. Nun sieht man aber leicht, daß das Klammerglied, das sich in der Form

$$\frac{1}{\omega_1^2 L^2} + \frac{1}{P}$$

schreiben läßt, nichts anderes ist als der reziproke Wert des von Hartmann mit Z' bezeichneten absoluten Betrages des Kombinationswiderstandes unserer ganzen Schwingungsanordnung Fig. 1 bei Resonanz; und zwar gilt dies ohne jede Vernachlässigung.

Also:

$$\text{(XII)} \quad r_1 = \frac{\omega_1 L}{Z'},$$

oder

$$\text{(XII')} \quad \frac{\omega_1 L}{r_1} = Z'$$

(XI') erhält also schließlich die Form:

$$\text{(XIII)} \quad V'^2 = \frac{1}{2} Z'^2 \frac{\omega_1 L}{Z'} \cdot \omega_1 e i_0,$$

woraus:

$$\text{(XIV)} \quad e = \frac{V'^2}{Z'^2 \omega_1 i_0} \cdot \frac{2Z'}{\omega_1 L}.$$

¹⁾ Die Zerlegung der rechten Werte in Faktoren mit $1/r_1^2$ und r_1 erfolgt mit Rücksicht auf die beabsichtigte Herausschälung des Korrektionsfaktors.

Vergleichen wir das mit der Hartmannschen Formel (10), S. 69

$$\varepsilon = \frac{I'^2}{i_0 \omega_0 Z'^2},$$

so sieht man, daß beide Formeln identisch sind bis auf den Faktor $2Z'/\omega_1 L$ oder, nach (XII) $2/r_1$, da unsere Größe ω_1 mit der Frequenz ω_0 der Hartmannschen Formel identisch ist. (Die Eigenschwingung ω_0 ist dort jedesmal mit Hilfe der Stimmgabel an der fertigen Schaltung, also unter Zuschaltung der Kapazitäten C_i und C_k bestimmt.)

Die Berücksichtigung der komplizierteren Stromkreise hat mit den begangenen Vernachlässigungen

$$\left[\left(\frac{R}{\omega_1 L} \right)^2 \ll 1, \quad \frac{R}{P} \ll 1 \right],$$

also zu einem sehr einfachen Resultat geführt: der Korrekturfaktor $2/r$, der bei dem idealen Stromkreis anzubringen gewesen wäre, wird bei dem Stromkreis mit Rohrrückwirkung und Verstärkerimpedanz einfach zu dem entsprechenden Faktor $2/r_1$, wobei r_1 das Dämpfungsverhältnis für diesen komplizierteren Kreis bedeutet.

Damit wird nun auch die Korrektur unserer früheren Resultate sehr einfach. Die Werte von Z' und L sind für alle in Frage kommenden Werte von ω aus den Tabellen 6 (S. 63) und 8 (S. 69) von Herrn Hartmann zu entnehmen (ω_1 gleich dem Hartmannschen ω_0), und man erhält so die in der 1. und 4. Spalte der umstehenden Tabelle angegebenen Werte. Wie man sieht, ist $Z'/\omega_1 L$ von der Größenordnung 100, $2Z'/\omega_1 L$ also etwa 200, und die früheren zu kleinen Werte von ε kommen damit in die richtige Größenordnung. Die genauen Resultate sind aus den Spalten 3 und 6 zu ersehen.

Graphisch sind die neuen Resultate in Fig. 2 dargestellt, die der Fig. 9 der Hartmannschen Arbeit entspricht, und die die berechneten Werte von ε (in Einheiten von 10^{-19} Coulomb) als Funktion der Eigenschwingung ω_1 des Schwingungskreises darstellt. Der Standardwert der elektrischen Elementarladung, $\varepsilon = 1,56 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, ist dabei als gestrichelte gerade Linie eingetragen, und man sieht ohne weiteres, daß ein Wert von dieser Größenordnung für den von uns beobachteten Effekt

Tabelle.

ω_1	1	2	3	4	5	6
	$i_0 = 2 \text{ MA}$			$i_0 = 20 \text{ MA}$		
	$\frac{Z'}{\omega_1 L}$	ϵ_{falsch}	$\epsilon_{\text{richtig}}$	$\frac{Z'}{\omega_1 L}$	ϵ_{falsch}	$\epsilon_{\text{richtig}}$
1500	69,5	$33 \cdot 10^{-22}$	$4,6 \cdot 10^{-10}$	63,1	$27 \cdot 10^{-22}$	$3,4 \cdot 10^{-10}$
2400	110	18,5	4,1	116	16,7	2,9
3000	152	7,8	2,1	109	6,7	2,2
3200	156	5,1	1,6	108	4,0	1,1
3500	159	3,3	1,0	101	3,3	0,7
4000	157	3,6	1,1	94,9	3,2	0,6
4500	152	4,6	1,4	89,1	2,8	0,5
5000	148	6,7	2,0	85,5	5,8	1,0
6000	142	5,7	1,6	76,9	4,4	0,7
7000	134	3,2	0,9	68,4	3,2	0,44
8170	123	1,8	0,45	60,6	1,1	0,13
9400	111	2,2	0,5	54,0	1,4	0,15
10000	108	3,2	0,7	50,8	1,7	0,17
10700	102	2,1	0,43	48,3	1,0	0,10
12000	92,5	2,7	0,5	43,4	2,1	0,18
14000	79,8	3,7	0,6	40,6	1,3	0,09
15000	74,4	6,7	1,0	35,3	4,5	0,32

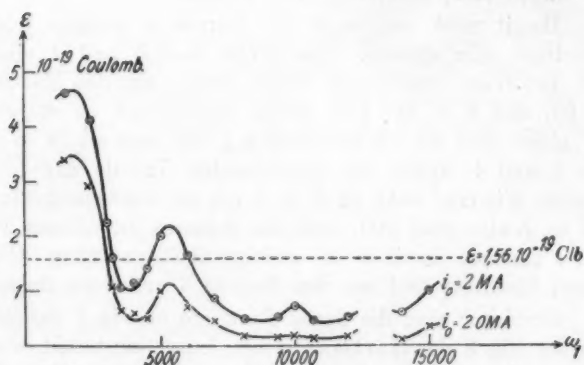


Fig. 2.

eine ausgezeichnete Bedeutung haben muß, da er ungefähr den Mittelwert aller Messungen darstellt. Diese nunmehr richtige Größenanordnung der aus dem Effekt berechneten Werte für

zufällig zu halten, wäre wohl ein bedeutend kühnerer Schritt als unsere frühere — auf dem falsch berechneten Resultat aufgebaute — Annahme, daß die falsche Größenanordnung durch gewisse Unzulänglichkeiten der Voraussetzungen vorgetäuscht sei, denn die Gründe, weshalb ein physikalisches Resultat sich anders ergeben kann, als man erwartet hat, sind doch überwiegend zahlreich — besonders wenn man die Möglichkeit von Rechenfehlern noch einschließt — gegenüber der Wahrscheinlichkeit, daß das *wirkliche Eintreffen* eines erwarteten Resultats ganz andere Gründe hat, als die erwarteten. Wir würden also in unseren Versuchen nunmehr — wenn es überhaupt zurzeit noch nötig ist, hierfür Beweise zu sammeln — einen weiteren Beleg für das Auftreten einer elektrischen Elementarladung von der ungefähren Größe $1,56 \cdot 10^{-19}$ Coulomb bei den thermischen Entladungsvorgängen im Vakuum erblicken.

Was ich weiter zur Diskussion der feineren Eigenschaften des beobachteten Effektes zu sagen habe, möchte ich jedoch, ebenso wie die früheren bei Herrn Hartmann (S. 74–77) wiedergegebenen Überlegungen, nur als Vermutung äußern, mit allen durch die Ungenauigkeit der Messungen und die Kompliziertheit der Erscheinungen bedingten Vorbehalten. Ich möchte zunächst bemerken, daß ich mich auf Grund der in Fig. 2 wiedergegebenen Resultate nicht ohne weiteres der Meinung von Herrn Johnson anschließen kann, daß wir es hier mit einer Entladung zu tun haben, bei denen ganze Gruppen von Elektronen auf einmal ausgesandt werden. Wenn dies ausschließlich und regelmäßig mit der gleichen Zahl von Elektronen in jeder Gruppe der Fall wäre, so müßte sich das Resultat der Messungen in Fig. 2 durch eine zum Standardwert parallele Gerade darstellen lassen, deren Abstand von der Abszisse ein ganzes Vielfaches des Standardwertes ist. Aber auch wenn ungleiche, aufeinander nicht rückwirkende Gruppen von Elektronen ausgesandt würden, wäre, wie die genauere Überlegung zeigt, eine solche Gerade zu erwarten, deren Höhe sich aus der Wahrscheinlichkeit des Auftretens der verschiedenen Gruppen berechnen ließe; keinesfalls wäre jedoch eine Frequenzabhängigkeit des berechneten Elementarquantums dadurch zu erklären.

Um es kurz zu sagen: es scheint mir, daß unsere An-

nahme einer thermischen Nachwirkung, einer Beeinflussung der Elektronenemission an irgendeiner Stelle durch die dort kurz vorher ausgetretenen Elektronen, durch die Korrektur, welche unsere Meßresultate durch Herrn Johnson erfahren haben, nicht widerlegt ist, sondern fast noch etwas an Wahrscheinlichkeit gewonnen hat. Denn wenn aus den früher angestellten Überlegungen (S. 76, Mitte) eine „günstige Beeinflussung“ der Schwankungen in den Fällen gefolgert wurde, wo das „sterile Gebiet“ nach $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ Perioden usw. sein Maximum erreicht hat, so stand dem bisher die auf diese Weise nicht zu deutende Tatsache gegenüber, daß der ganze Effekt für alle Frequenzen etwa 300 mal schwächer war als erwartet, so daß stets nur eine „ungünstige Beeinflussung“ zu konstatieren war. Nach dem korrigierten Ergebnis Fig. 2 schwankt jedoch der berechnete Wert der Elementarladung um den Standardwert herum; die Maxima, deren Amplitude übrigens mit zunehmender Frequenz abnimmt, liegen z. T. wesentlich über dem Standardwert. Ferner ist jetzt ein weiteres Maximum, bei ca. $\omega_1 = 1800$, wenn auch sehr unbestimmt, zum Vorschein gekommen. Soviel man aus den Kurven, in denen jetzt die Wellenlinien genau den Messungen entsprechend, und nicht, wie früher, ausgleichend durchgezogen sind, entnehmen kann, liegen die Maxima jetzt etwa bei folgenden Frequenzen:

1800 5300 10000 ? 15500.

Diese Schwingungszahlen verhalten sich wie:

$$1 : 2,9 : 5,6 : ? : 8,6,$$

also innerhalb der Meßgrenzen wie:

$$1 : 3 : 5 : ? : 9. \quad *$$

Die Übereinstimmung mit der thermischen Rückwirkungstheorie, die einen „Begünstigungseffekt“ erwarten läßt, wenn die „sterile Fläche“ nach $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ Perioden ihren Maximalwert erreicht hat, also, bei gegebener Entstehungszeit der maximalen sterilen Fläche, bei Frequenzen, die sich wie $1 : 3 : 5 : 7 : 9$ usw. verhalten, kann natürlich eine zufällige sein, doch habe ich diese Beziehungen immerhin für der Er-

währung wert gehalten. Wenn diese Überlegungen eine reelle Basis haben, müßte das Maximum bei 1800 übrigens das erste überhaupt auftretende sein, und die Kurve dürfte, ehe sie sich bei kleinen Frequenzen aperiodisch dem Standardwert nähert, nur noch *ein* Minimum vorher besitzen. Die natürliche Extrapolation der Kurve scheint dem jedenfalls nicht zu widersprechen.

Weshalb von dem dritten Maximum an die scheinbaren ε -Werte unter dem Standardwert liegen, weshalb bei höherem Sättigungsstrom die „Begünstigungseffekte“ anscheinend mehr unterdrückt und nur die schwankungsverkleinernden Wirkungen stärker werden, und weshalb bei $\omega_1 = 15000$ wieder eine so ausgesprochen ansteigende Tendenz des scheinbaren ε -Wertes auftritt, muß überhaupt noch völlig offen bleiben. Beachtenswert erscheint mir jedoch auf alle Fälle die Tatsache, daß der Unterschied zwischen den Werten für $i_0 = 2\text{ MA}$ und 20 MA durch die Korrektur von Herrn Johnson nicht herabgedrückt worden ist, wie ich zunächst vermutet hatte, sondern vergrößert; es scheint mir das jedenfalls auch *zugunsten* einer thermischen Beeinflussung zu sprechen.

Herr Johnson hat, außer dem Rechenfehler, noch die „bedenkliche Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung“ in meiner Ableitung der Schwingungsenergie des Schroteffektes beanstandet. Vielleicht beseitigt die zweite hier angebrachte Korrektur (Ersatz der „kohärenten“ Fourierdarstellung durch die gewöhnliche, mit zwei „inkohärenten“ Reihen) einige weitere Bedenken in dieser Richtung; freilich bleibt die Ableitung dabei immer noch schwierig und unübersichtlich. Daß der Gedankengang jedoch noch weitere *tatsächliche* Fehlschlüsse enthält, glaube ich nicht, und zwar habe ich da ein Argument, das ich nicht unterdrücken kann, obwohl die Situation dadurch für uns nicht gerade verbessert wird. Schon im Jahre 1920 habe ich von Herrn Ornstein in Utrecht eine Zuschrift erhalten, in der er eine Berechnung des quadratischen Mittelwertes der Stromstärke J im Schwingungskreis auf Grund einer ganz anderen, von ihm schon in anderen Fällen benutzten Methode durchgeführt hat, welche zu einem von dem meinigen abweichenden Ergebnis führte. Wie sich jetzt feststellen ließ, entspricht die Ornsteinsche Rechnung, über die damals wegen

Zeitmangel keine völlige Klärung erzielt werden konnte, genau dem nach meiner Methode berechneten, nunmehr korrigierten Resultat, so daß an der tatsächlichen Berechtigung meiner Wahrscheinlichkeitsbetrachtung wohl kein Zweifel besteht. Bedauerlich ist nur, daß wir nicht schon früher versucht haben, die Resultate Herrn Hartmanns nach der Ornsteinschen Formel, die, wie sich jetzt herausgestellt hat, die richtige war, auszuwerten.

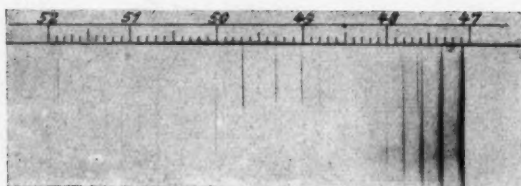
Siemensstadt, den 23. März 1922.

(Eingegangen 30. März 1922.)

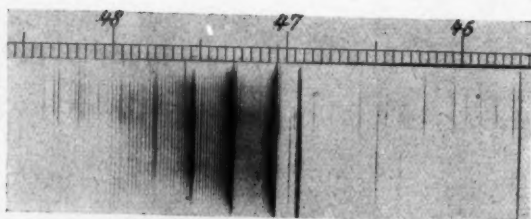
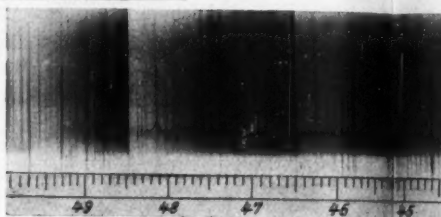
Zusatz bei der Korrektur. 2. 6. 22. Wie ich einer freundlichen Zuschrift Herrn Johnsons, nach Übersendung des Manuskripts dieser Arbeit entnehme, hält er nach Einführung des zweiten Korrektionsfaktors 2, der die „zu großen“ α -Werte reduziert, seine Hypothese der „Gruppenemission“ von Elektronen nicht mehr für unbedingt notwendig. Die Annahme eines *Abkühlungseffektes durch einzelne Elektronen* sei zwar merkwürdig, aber doch nicht merkwürdiger als die ursprüngliche Hypothese des Schroteffektes selbst, daß nämlich durch die Emission einzelner Elektronen abhörbare Diskontinuitäten im Stromübergang auftreten könnten. — Die wahrscheinlichkeitstheoretischen Bedenken Herrn Johnsons richteten sich, wie er mir mitteilt, hauptsächlich gegen die Anwendung der Fourierzerlegung auf eine vollständig chaotische Reihe von Ereignissen; das Ergebnis scheine nun doch schließlich die Methode zu rechtfertigen.

es,
an
en
er
de-
en,
en
ar,

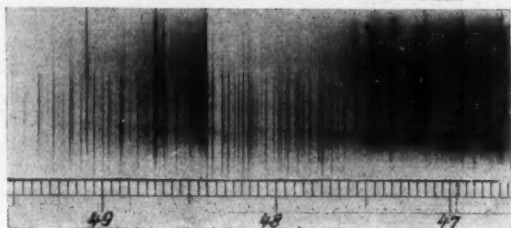
ad-
les
ung
rte
ek-
me
rk-
che
die
im
its-
wie
der
von
die



Beryllium.

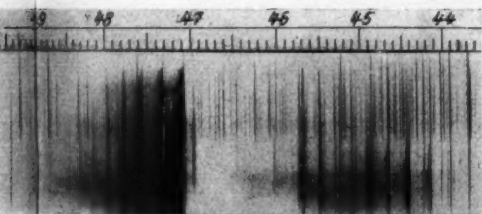


Be



Al

Aluminium.



Be

Al

